Mecánica analítica

Enrique Yépez Mulia
Miztli Y. Yépez Martínez

$$\mathrm{F}(\mathrm{r},\dot{\mathrm{r}},\alpha,\beta,\ldots,t) = m\,\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{r}(t).$$

Temas de Física

las prensas de ciencias

Mecánica analítica

Enrique Yépez Mulia
y
Miztli Y. Yépez Martínez

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

Yépez Mulia, Enrique, autor.

Mecánica analítica/Enrique Pérez Mulia y Miztli Y. Yépez Martínez. –- 2a edición. –- México: Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2012.

xiv, 413 páginas ; ilustraciones ; 22 cm. –- (Las prensas de ciencias) (Temas de física)

Bibliografía: páginas 403-407

ISBN 978-607-02-3744-7

1. Mecánica analítica. 2. Mecánica analítica – Problemas, ejercicios, etc. 3. Dinámica. I. Yépez Martínez Miztli Y. II. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. III. Título. IV. Serie. V. Serie: Temas de física.

531.1-scdd21 Biblioteca Nacional de México

Mecánica analítica
1ª edición, 2007
2ª edición, 2012
1ª reimpresión, 2016

© D. R. 2012, Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias. Circuito exterior. Ciudad Universitaria.
Delegación Coyoacán. Ciudad de México. C.P. 04510.
editoriales@ciencias.unam.mx

ISBN. 978-607-02-3744-7

Diseño de portada: Laura Uribe
Formación de interiores: Héctor Cejudo Camacho y los autores

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio, sin la autorización por escrito del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México

ÍNDICE GENERAL

1. Vectores **1**

1.1. Sistema de unidades 1
1.2. Vectores y escalares 4
1.3. Operaciones con vectores 7
1.4. Cálculo vectorial 11
1.5. Gradiente, divergencia y rotacional 14
1.6. Teoremas de Stokes, de Gauss, de Green y de Helmholtz 16
1.7. Cinemática de una partícula 22
1.8. Ejercicios 29

2. Leyes del movimiento **31**

2.1. Principio de relatividad de Galileo y leyes de Newton 31
2.2. Ejemplos de leyes del movimiento 41
2.3. Aplicaciones de las leyes de movimiento 52
2.4. Movimientos oscilatorios 64
2.4.1. Osciladores 64
2.4.2. Movimientos pendulares 91
2.5. Fuerzas electromagnéticas 102
2.6. Ejercicios 106

3. Sistemas de referencia no inerciales **111**

3.1. Transformación de coordenadas 111
3.2. Efectos inerciales 118

3.3. Efectos inerciales debidos al movimiento de la Tierra 126
3.4. Ejercicios 138

4. Teoremas de conservación **141**
4.1. Dinámica de una partícula 141
4.2. Dinámica de un sistema de partículas 147
4.3. Teorema del virial 155
4.4. Integrales del movimiento 159
4.5. Campo central 164
4.6. Ejercicios 172

5. Método de Lagrange **175**
5.1. Restricciones 175
5.2. Ejemplos de restricciones 178
5.3. Principio de D'Alembert 186
5.4. Ecuaciones de Lagrange 190
5.5. Ejemplos del método lagrangiano 195
5.6. Potenciales generalizados 205
5.7. Función de disipación 209
5.8. Energía cinética 210
5.9. No unicidad de la función lagrangiana 212
5.10. Simetrías y teoremas de conservación 213
5.11. Ecuaciones de Hamilton 222
5.12. Ejercicios 226

6. Campo central **231**
6.1. Integrales de movimiento 232
6.2. Análisis del potencial efectivo 240
6.3. Ecuación de la órbita 245
6.4. La ecuación diferencial de la órbita 252
6.5. Teorema de Bertrand 254
6.6. Vector de Laplace-Runge-Lenz 257
6.7. Dispersión de Rutherford 259
6.8. Ejercicios 265

7. Movimiento del cuerpo rígido **267**
7.1. Cinemática del cuerpo rígido 267
7.2. Ángulos de Euler 279
7.3. Lagrangiana del cuerpo rígido 284
7.3.1. Ecuaciones de Euler 284
7.3.2. Péndulos 290
7.3.3. Rotor libre 293
7.4. El cuerpo rígido simétrico con un punto fijo . . . 297
7.5. Ejercicios 306

8. Oscilaciones pequeñas **307**
8.1. Modos normales de vibración 307
8.2. Oscilaciones acopladas 312
8.3. Método alternativo 319
8.4. Ejercicios 322

9. Tópicos de la mecánica hamiltoniana **325**
9.1. Principios variacionales de la mecánica 326
9.2. Equivalencia con el principio de D'Alembert . . . 330
9.3. Sistemas no conservativos y no holonómicos . . . 335
9.4. Ecuaciones de movimiento de Hamilton 342
9.5. Teoremas de conservación 347
9.6. Ecuaciones de Hamilton y el principio variacional 349
9.7. Principio de mínima acción 352
9.8. Transformaciones canónicas 354
9.9. Paréntesis de Lagrange y de Poisson 363
9.10. Teoría de Hamilton-Jacobi 370
9.10.1. El oscilador armónico 374
9.11. Variables de acción y de ángulo 376
9.11.1. Campo central 378
9.12. La ecuación de Schrödinger 385
9.13. Ejercicios 396

A. Abreviaturas y notaciones **399**

B. Notación **401**

Bibliografía **403**

Índice analítico **408**

AGRADECIMIENTOS

El primer agradecimiento es para los estudiantes que padecieron los primeros manuscritos y que nos hicieron notar fallas y errores, además de hacer valiosos comentarios. Agradecemos muy especialmente a nuestros colegas que revisaron este manuscrito y nos hicieron críticas y sugerencias: V. Granados García, S. Barraza López, R. Peralta Fabi y J. M. Lozano. Agradecemos también a A. V. Porta Contreras por sus valiosos comentarios y la revisión del primer manuscrito y a Huitzilin Yépez M. sus comentarios y críticas. Finalmente, agradecemos a la Sra. Dolores Sosa gran parte de la versión en TEX y por la confección de varias figuras.

PREFACIO

La mecánica de Newton es la primera teoría científica que se establece formalmente y lo hace con gran éxito. Es la primera que usa fielmente el método científico y con éste, logró un gran avance en el conocimiento. Es una teoría que destaca por su exactitud, su consistencia, su generalidad, además, es una bella teoría. La precisión con que describe el movimiento de objetos celestes y objetos de nuestra experiencia cotidiana impactó profundamente en su época y lo sigue haciendo hasta nuestros días. La mecánica clásica o newtoniana establece los cimientos para toda la estructura de la física y de la ciencia moderna.

El estudio formal de la mecánica clásica presenta un gran reto para los estudiantes de física y disciplinas afines; con este tema el estudiante inicia un estudio formal de la física teórica, en el que aprende los conceptos básicos y debe ser capaz de usarlos en la solución de problemas prácticos y de interés académico. Para introducirse a este tema existen muchos textos útiles, algunos extienden y profundizan lo aprendido en un curso elemental, otros son demasiado extensos de tal forma que no pueden ser cubiertos en un curso semestral, algunos son superficiales y otros demasiado formales. Después de varios años de experiencia en la enseñanza de este tema, hemos encontrado un contenido para el curso de mecánica clásica que se adapta lo mejor posible a las necesidades y características de los estudiantes de este nivel en una universidad mexicana, y se ajusta también al tiempo disponible. El texto está escrito tomando en cuenta las normas de los contenidos oficiales y los conocimientos de física y matemáticas que poseen los estudiantes de este nivel,

así como los conocimientos que debe alcanzar para continuar con el estudio de una carrera de física.

El eje de esta presentación de la mecánica analítica lo basamos en los teoremas de conservación (integrales de movimiento) como método general para resolver problemas mecánicos, En los conceptos de coordenadas generalizadas y trabajo virtual que permiten eliminar las restricciones de gran cantidad de sistemas mecánicos. Y en la formulación lagrangiana de la mecánica.

En esta presentación destacamos los siguientes aspectos: en los tres primeros capítulos describimos el sistema de unidades y algunos conceptos matemáticos y cinemáticos, establecemos los conceptos básicos de la mecánica y su marco de referencia, y también presentamos las bases de la teoría newtoniana y la aplicamos a sistemas sencillos; los ejemplificamos en el texto y con ejercicios para el lector. En el capítulo cuatro describimos el método general para resolver un problema mecánico con base en los teoremas de conservación y las constantes de movimiento o integrales de movimiento. Para este propósito incluimos una sección sobre las integrales de movimiento de un sistema de ecuaciones diferenciales (sección 4.4). En el resto del capítulo desarrollamos los teoremas generales de conservación para el momento lineal, el momento angular y la energía. Este método se ejemplifica detalladamente con el oscilador armónico tridimensional. En el capítulo cinco presentamos el formalismo de Lagrange, partiendo del principio de D'Alembert. Destacamos que el objetivo de esta descripción es eliminar a las fuerzas de restricción que usualmente son desconocidas. Definimos y ejemplificamos el concepto de desplazamiento virtual tan claramente como nos es posible y obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de las coordenadas generalizadas. Escribimos los teoremas generales de conservación en el formalismo de Lagrange e incluimos en esta formulación el caso de las interacciones electromagnéticas. Además, presentamos ejemplos y ejercicios ilustrativos. En el capítulo seis estudiamos el problema del campo central usando el formalismo de Lagrange y

los teoremas generales de conservación; describimos con detalle la solución que proporciona este método para el problema de Kepler. En el capítulo siete estudiamos el movimiento del cuerpo rígido basándonos en la matriz de rotación de Euler; obtenemos las ecuaciones de Euler y describimos el formalismo lagrangiano para el estudio del cuerpo rígido; aplicamos esto al cuerpo rígido simétrico con un punto fijo en un campo gravitacional. En el capítulo ocho estudiamos, con este método general, el problema de sistemas estables en oscilaciones pequeñas, cerca de su estado de equilibrio. El capítulo nueve presenta un resumen de los resultados más importantes de la dinámica de Hamilton y el principio variacional, incluimos el método de Hamilton y Jacobi y las variables de ángulo-acción. Finalmente, en este capítulo ejemplificamos el principio variacional mostrando su generalidad y el uso que le dio E. Schrödinger para establecer su famosa ecuación de movimiento.

En los libros de texto usuales para este curso, los temas del capítulo nueve se tratan de manera superficial o se omiten. En la exposición de este tema también hemos sido superficiales en cierta medida, pensando que estos temas se profundizarán en un curso de posgrado; sin embargo, no omitimos los conocimientos básicos a pesar de no hacer todas las demostraciones. La razón para incluir este capítulo es la necesidad de los estudiantes para enfrentar cursos posteriores que requieren del formalismo de Hamilton. Un buen ejemplo de esta afirmación es la teoría cuántica, la cual, además de ser conceptualmente difícil, su formalismo es hamiltoniano. El estudiante que enfrenta por primera vez la teoría cuántica desconoce el formalismo de Hamilton o su conocimiento es superficial; sin embargo, enfrenta una teoría compleja, sobre objetos de los que no tiene experiencia cotidiana y escrita en un formalismo que usualmente desconoce; el resultado de tales condiciones suele ser negativo. Esperamos que este capítulo ayude a minimizar esta dificultad. Otra razón para incluir este capítulo es que la teoría de Hamilton, al igual que la de Lagrange, es muy útil y general además de ser muy bella;

más aún, la mecánica analítica es una teoría que permite al estudiante familiarizarse con los formalismos de la física teórica.

Algunos temas y mayor profundidad en las matemáticas involucradas tuvieron que dejarse aparte para no hacer más extenso el contenido. Muchos detalles o extensiones de varios temas fueron referidos a la bibliografía, la cual hemos tratado de limitar a la más general, pero suficiente. En cada capítulo incluimos una breve lista de referencias apropiadas a cada tema, así como bibliografía complementaria. En cada capítulo se incluyen ejemplos ilustrativos y ejercicios para el estudiante.

1

VECTORES

En este capítulo revisamos brevemente algunos conceptos útiles en la descripción de los sistemas mecánicos: los sistemas de unidades más usados para la medición de diversas cantidades físicas, los conceptos más importantes del álgebra y el cálculo de vectores, los teoremas más relevantes relacionados con la integración y derivación de las cantidades vectoriales, así como los conceptos básicos de la cinemática de las partículas. Las demostraciones y otras propiedades generales las omitimos por razones de espacio, sin embargo, pueden ser consultadas en las siguientes referencias: [2, 9, 24, 25, 26, 29, 30, 31].

1.1. Sistema de unidades

Para poder describir los fenómenos naturales de forma cuantitativa y de manera universal, es necesario establecer un conjunto de definiciones y patrones de medida para las cantidades físicas básicas; de esta forma se puede referir apropiadamente las propiedades físicas de cualquier fenómeno en cualquier laboratorio y por cualquier persona. Estos patrones son convencionales y deben ser adoptados universalmente. Las definiciones sobre propiedades como: espacio, tiempo, masa, carga eléctrica, etc. se hacen con base en propiedades o fenómenos que son reproducibles en cualquier laboratorio; otras cantidades físicas derivadas como la energía, fuerza, momento lineal o acción; se pueden dimensionar en términos de las cantidades básicas previamente

definidas. Son seis las cantidades fundamentales: el segundo (s) que mide la unidad de tiempo, el metro (m) que mide la unidad de intervalo espacial (longitud), el kilogramo (kg) midiendo la masa que determina el contenido de materia, el Coulomb (C) mide la carga eléctrica que es la cantidad de electricidad contenida por un objeto (el patrón en este caso se fija midiendo la corriente eléctrica, de tal forma que un Coulomb es un $Ampere \times segundo$), el grado Kelvin (K) mide la temperatura que caracteriza el estado de un sistema macroscópico y la candela (cd) que mide la intensidad luminosa de un objeto. Estas cantidades son independientes entre sí y fácilmente reproducibles. Dichas cantidades se definen y regulan por el Departamento Internacional de Patrones (IBS por sus siglas en inglés)[1].

Sistema internacional de unidades

Las cantidades físicas de interés se miden de acuerdo a sus propiedades físicas y éstas se definen de acuerdo a un sistema de unidades, bajo las siguientes convenciones:

Sistema internacional de unidades (SI o MKS)

longitud	$1\,m = 1650763{,}73$ longitud de onda línea naranja del Kr^{86}
masa	$1\,kg =$ masa del cilindro (Pt-Ir) del IBS
tiempo	$1\,s = (1/31536945{,}9747)$ año (año 1900)
carga	$1\,C = (-1{,}6 \times 10^{-19})^{-1}\ e_0$ (e_0 de la carga del electrón, intrinsecamente negativa)
temperatura	$273{,}16K$ es el punto triple del agua
luminosidad	cd=luminosidad de un cuerpo negro de Pt sobre una área $(1/600000)m^2$ a presión de 101.325 N/m^2 a su temperatura de fusión

[1]Para mayores detalles se puede consultar la referencia [42].

Existe otro sistema de unidades similar al SI, el sistema CGS, también llamado gaussiano**,** en éste, las unidades básicas son el centímetro($1\ cm = 10^{-2}\ m$), el gramo ($1\ gr = 10^{-3}\ kg$) y el segundo. Sin embargo, la diferencia más importante con el SI es que no hay una unidad fundamental para la carga. La carga en este sistema se mide en unidades electrostáticas de carga, ésta se deriva de las otras unidades básicas (el centímetro, el gramo y el segundo) de tal forma que la unidad de carga es aquella en donde dos cargas unitarias ejercen entre ellas una fuerza de una dina ($gr \cdot cm^2/s$) cuando están separadas un cm. Este sistema y el sistema inglés de unidades se usan cada vez menos; sin embargo, es frecuente encontrar referencias a ellos; muchos textos clásicos y algunos actuales, en la teoría cuántica y en la electrodinámica se refieren muy frecuentemente al sistema CGS de unidades.

Sistema natural de unidades

1. En el caso de sistemas microscópicos y/o de velocidades cercanas a la de la luz es muy conveniente definir el sistema natural de unidades (**SN**); éste tiene la ventaja de estar definido en términos de constantes físicas cuyas definiciones están referidas a fenómenos físicos básicos; como el de la radiación de cuerpo negro o el experimento de Michelson-Morley. La ventaja de este sistema reside en la facilidad de su uso; por ejemplo, para el caso de un electrón, su carga y su masa son la unidad mientras que su acción se mide en múltiplos de la constante de Planck. Las unidades básicas de **SN** son :

Sistema natural de unidades (SN)

acción	$h = 6{,}63 \times 10^{-34} J \cdot s$	constante de Planck
velocidad	$c = 299\ 792\ 458$ m/s	velocidad de la luz
masa	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ Kg	masa del electrón (e^-)
carga	$-e_0 = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C	carga del e^-

En este sistema de unidades $1\,m = 4{,}122 \times 10^{11} \frac{h}{m_e c}$ todas las unidades del SI (del CGS o del sistema inglés) pueden ser transformadas al SN por simple sustitución, cuando sea necesario al sistema natural de unidades deben añadirse las unidades de temperatura y de luminosidad.

1.2. Vectores y escalares

Para describir a los sistemas físicos se requiere de cantidades matemáticas con diversas propiedades, entre ellos se encuentran los escalares, las cantidades vectoriales, matrices, tensores, etc. En la mecánica las que se usan con mayor frecuencia son las cantidades escalares y vectoriales, que ahora definiremos:

Escalar: cantidad especificada por una sola magnitud o número (con o sin unidades). Ejemplos de una cantidad escalar son: masa (en kg), temperatura (en K), energía cinética ($Joules = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$), apertura angular (sin unidades), etc.

Vector: cantidad física que para especificarse requiere de magnitud y dirección, por ejemplo, posición de una partícula referida a un sistema de coordenadas, velocidad, momento angular, etc. Una definición más apropiada para un vector es mediante sus propiedades de transformación de un sistema coordenado a otro de la siguiente forma:

$$x'_i = \sum_j A_{ij} x_j \tag{1.1}$$

donde x_j y x'_i son las componentes del vector en dos sistemas de coordenadas (S *y* $S\prime$) y A_{ij} son los elementos de la transformación entre dichos sistemas coordenados. Ante una transformación por rotación del sistema de ejes coordenados, un vector conserva su norma o magnitud.

En el espacio de tres dimensiones, donde las posiciones se iden-

tifican por un sistema cartesiano ortogonal y derecho[2], el vector se caracteriza por tres cantidades escalares llamadas sus componentes, cada componente corresponde a la longitud proyectada sobre los ejes cartesianos. En un espacio n-dimensional el número de componentes será el mismo que la dimensión del espacio donde está definido; usualmente el sistema de ejes al que está referido el vector en n dimensiones es cartesiano, esta convención la usaremos a menos que especifiquemos lo contrario.

Las notaciones más frecuentes para los vectores suelen ser,

$$\overrightarrow{A},\ \underline{A},\ \mathbf{A}. \tag{1.2}$$

En el espacio cartesiano de dimensión n las componentes cartesianas se pueden escribir como sigue

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)\,. \tag{1.3}$$

En esta notación las componentes $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ están ordenadas de acuerdo al orden de los ejes cartesianos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Si el sistema de coordenadas es ortogonal (basta con que estas coordenadas sean linealmente independientes), se pueden definir vectores unitarios $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, ..., \widehat{u}_n$ todos de magnitud unidad y en la dirección de los correspondientes ejes. A este conjunto de vectores se le llama una *base* en ese espacio, esta base no es única. Cualquier vector en este espacio se puede escribir como una combinación lineal de estos vectores . De esta forma, en tres dimensiones, el vector se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{A} = a_1\widehat{u}_1 + a_2\widehat{u}_2 + a_3\widehat{u}_3\ . \tag{1.4}$$

En este caso los vectores unitarios del sistema cartesiano tienen la siguiente notación especial:

$$\widehat{u}_1 = \widehat{i},\ \ \widehat{u}_2 = \widehat{j},\ \ \widehat{u}_3 = \widehat{k}\ , \tag{1.5}$$

[2]Por ortogonal entenderemos que los ejes de referencia se encuentran todos a 90° entre sí. Por derecho, entenderemos que si los ejes x, y, z se asocian a los dedos de la mano derecha, el eje x corresponde al dedo índice, el eje y al dedo medio y el eje z correspondería al dedo pulgar, usualmente se escoge este último como el eje vertical. Un sistema izquierdo correspondería a los dedos de la mano izquierda o a una reflexión sobre un plano vertical del sistema derecho.

que es equivalente a escribir (ver figura 1.1.))

$$\widehat{i} = (1,0,0)\,,\ \ \widehat{j} = (0,1,0)\,,\ \ \widehat{k} = (0,0,1)\,, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3). \tag{1.7}$$

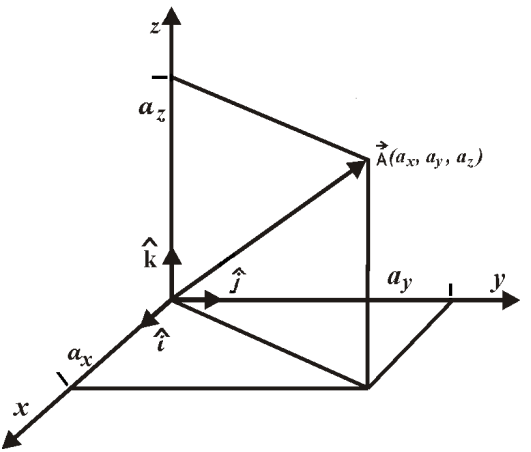

Figura 1.1. Representación gráfica de un vector en un sistema cartesiano tridimensional.

Definimos la magnitud de un vector como el tamaño que tiene su representación gráfica, de tal forma que aplicando el teorema de Pitágoras tendremos que la magnitud o norma de **A** es:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{1.8}$$

la ecuación (1.8) es en sí misma una definición de la magnitud del vector **A**. Para el caso de un vector en un espacio n-dimensional ortogonal la norma será:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \tag{1.9}$$

donde a_i son las componentes del vector en ese espacio.

1.3. Operaciones con vectores

El álgebra de vectores y algunas definiciones y propiedades que nos serán muy útiles en el estudio de la mecánica las listamos a continuación[3]. En lo que resta de este capítulo nos referiremos a un espacio tridimensional y un sistema de coordenadas cartesiano, a menos que señalemos lo contrario.

Suma de vectores

El álgebra de vectores, algunas definiciones y propiedades que nos serán muy útiles en el estudio de la mecánica las listamos a continación[4]:

Suma de Vectores
Para dos vectores arbitrarios $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x,\, B_y,\, B_z)$, definimos la suma entre ellos como sigue:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x,\;\; A_y + B_y,\;\; A_z + B_z)\,, \tag{1.10}$$

en términos de la base ortogonal cartesiana la suma se puede escribir así

$$\mathbf{C} = (A_x + B_x)\,\widehat{i} + (A_y + B_y)\,\widehat{j} + (A_z + B_z)\,\widehat{k}. \tag{1.11}$$

Esta suma tiene las propiedades conmutativa y asociativa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{1.12}$$

Multiplicación por un escalar

[3]Las demostraciones y propiedades más generales pueden consultarse en las referencias citadas al inicio de este capítulo.

[4]Las demostraciones y propiedades más generales pueden consultarse en las referencias citadas al inicio de este capítulo.

Si α es un escalar y $\mathbf{A}$ es un vector, su producto con un escalar se define como:

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z) \tag{1.13}$$

y su norma es $|\alpha\mathbf{A}| = |\alpha|\,|\mathbf{A}|$. De tal forma que $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{A} = (1+\alpha)\,\mathbf{A}$. Si $\alpha = -1$ tendremos que $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{0} = (0,0,0)$ el vector nulo.

Producto escalar

El producto escalar de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se define por

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\,, \tag{1.14}$$

también se le llama producto punto o producto interno; este producto es conmutativo y distributivo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\,, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \;+\; \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}. \tag{1.16}$$

Igualmente se puede escribir que

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}, \tag{1.17}$$

θ_{AB} es el ángulo que forman los vectores. Es fácil demostrar que:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2 \tag{1.18}$$

el resultado del producto punto es un escalar.

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{k},\\ \mathbf{B} &= B_x\widehat{i} + B_y\widehat{j} + B_z\widehat{k}\end{aligned} \tag{1.19}$$

se denota y define por:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\widehat{i}\,(A_yB_z-A_zB_y)+\widehat{j}\,(A_zB_x-A_xB_z) \tag{1.20}$$

$$+\,\widehat{k}\,(A_xB_y-A_yB_x) \tag{1.21}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

El producto vectorial resulta en un vector y tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\ +\ \mathbf{A}\times\mathbf{C} \tag{1.23}$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB\ \text{sen}\ \theta_{AB} \tag{1.24}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\ sen\ \theta_{AB}\widehat{u}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A} \tag{1.25}$$

donde $\widehat{u}$ es un vector de magnitud unidad perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{B}$, de acuerdo a la regla de la mano derecha, θ_{AB} es el ángulo entre los vectores, ver figura (1.2.).
Con estas definiciones resulta fácil probar las siguientes propiedades de los productos escalares y vectoriales de los vectores unitarios cartesianos:

$$\begin{aligned}&\widehat{i}\cdot\widehat{i}=\widehat{j}\cdot\widehat{j}=\widehat{k}\cdot\widehat{k}=1\\ &\widehat{i}\cdot\widehat{j}=\widehat{i}\cdot\widehat{k}=\widehat{j}\cdot\widehat{k}=0\\ &\widehat{i}\times\widehat{i}=\widehat{j}\times\widehat{j}=\widehat{k}\times\widehat{k}=0\\ &\widehat{i}\times\widehat{j}=\widehat{k},\ \ \widehat{j}\times\widehat{k}=\widehat{i},\ \ \widehat{i}\times\widehat{k}=-\widehat{j}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Triple producto escalar
El triple producto escalar se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \tag{1.27}$$

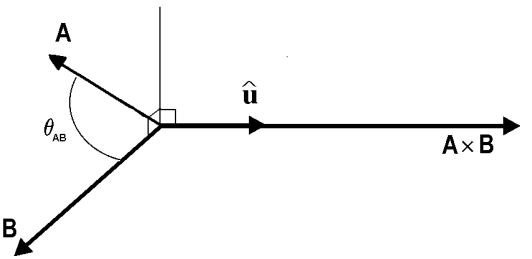

Figura 1.2. Dirección del producto vectorial de acuerdo a la regla de la mano derecha.

y cumple con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}), \tag{1.28}$$

gracias a las propiedades del determinante, es fácil probar que se puede intercambiar el punto y la cruz o cambiar cíclicamente el orden de los vectores, el resultado es un escalar y se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores. Si dos de estos vectores son colineales o si los tres vectores están en el mismo plano el producto vectorial entre ellos es nulo, *i.e.*, el volumen que definen es nulo.

Triple producto vectorial
También encontramos con frecuencia el llamado triple producto vectorial, el vector obtenido de éste puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\, \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{C}\ . \tag{1.29}$$

Estas propiedades del álgebra de vectores resultan de gran utilidad en el estudio de la cinemática y de la dinámica como mostraremos más adelante.

1.4. Cálculo vectorial

Las cantidades escalares que representan a variables físicas suelen variar con respecto a algún parámetro; por ejemplo, la densidad de un fluido puede cambiar con la posición y con el tiempo, es decir, $\rho = \rho(x, y, z, t)$. En este caso decimos que tenemos un *campo escalar*, la densidad está definida en algún dominio del espacio tridimensional, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$ y en algún intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Cuando la cantidad física de interés es una cantidad vectorial y ésta es función de la posición y del tiempo $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, obtenemos un *campo vectorial dependiente*. La cantidad vectorial $\mathbf{A}$ está definida en cada punto de algún dominio de $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$ y para todo instante t en el intervalo de definición $t \in [t_1, t_2]$.

En el estudio de la dinámica de los cuerpos (el movimiento y sus causas) necesitamos identificar las variaciones temporales de varias cantidades escalares y vectoriales y por lo tanto, necesitamos calcular sus derivadas temporales. Supondremos que estas funciones son continuas y derivables en todos los puntos dentro del dominio de definición, cuando no sea así lo especificaremos explícitamente. Definimos la derivada con respecto al parámetro escalar u de una función vectorial $\mathbf{A}(u)$ en el espacio tridimensional de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{A}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta A_x}{\Delta u}, \frac{\Delta A_y}{\Delta u}, \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right), \tag{1.30}$$

o bien

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \widehat{i}\frac{dA_x}{du} + \widehat{j}\frac{dA_y}{du} + \widehat{k}\frac{dA_z}{du}.$$

Aquí, estamos suponiendo implícitamente que el sistema de ejes coordenados no cambia con el parámetro u. Si el parámetro es el tiempo t (en el caso de la mecánica es el parámetro independiente), la evolución temporal del campo vectorial $\mathbf{A}$ también

suele escribirse de la siguiente forma[5]:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt},\ \frac{dA_y}{dt},\ \frac{dA_z}{dt}\right) \tag{1.31}$$

$$\frac{dA_x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_x(t+\Delta t) - A_x(t)}{\Delta t}. \tag{1.32}$$

De acuerdo a la definición de la derivada en la ecuación (1.30), es muy fácil probar que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \left(\frac{d}{du}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \frac{d\phi}{du}\mathbf{A} + \phi\frac{d\mathbf{A}}{du} \\
&\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\cdot\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right) \\
&\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})) = \frac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \\
&\qquad\qquad + \mathbf{A}\times\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

donde $\phi(u)$ es una función escalar, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son campos vectoriales dependientes del parámetro u.

Las derivadas parciales de un vector se definen de la misma forma que para cualquier función; supongamos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ es un campo vectorial, su derivada parcial respecto a la

[5]Es usual en la mecánica denotar con un punto arriba de la cantidad a la derivada con respecto del tiempo, esta notación la usaremos a lo largo del texto.

variable independiente x es:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x) - \mathbf{A}(x)}{\Delta x} \tag{1.34}$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\widehat{j} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\widehat{k} \tag{1.35}$$

análogamente se pueden definir $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$ y $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$.

Propiedades geométricas de una curva

El cálculo vectorial resulta útil para describir las propiedades geométricas de una curva, supongamos que la curva c está descrita por el vector de posición $\mathbf{r}(s)$, donde el parámetro s es la longitud de arco medida desde algún punto P_0 sobre la curva, las derivadas del vector de posición definen tres vectores relevantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ k\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

$\mathbf{T}$ es el vector tangente a la curva en el punto P. $\mathbf{N}$ la normal a la curva, es un vector unitario. $\mathbf{B}$ es la binormal; entonces $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ también se le llama la normal principal, k es la curvatura y $\rho = 1/k$ el radio de curvatura en el punto $P(x, y, z)$. La binormal $\mathbf{B}$ también es un vector de magnitud unitaria, $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. De esta forma $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ **y** $\mathbf{B}$ forman un sistema de vectores ortogonal y derecho en el punto P de cualquier curva, a esta terna se le llama la terna móvil o la terna unitaria local.

También, se pueden probar las relaciones de Frenet-Serret,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}, \ \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - k\mathbf{T}, \ \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \quad , \tag{1.37}$$

τ es la torsión, $\sigma = 1/\tau$ es el radio de torsión.

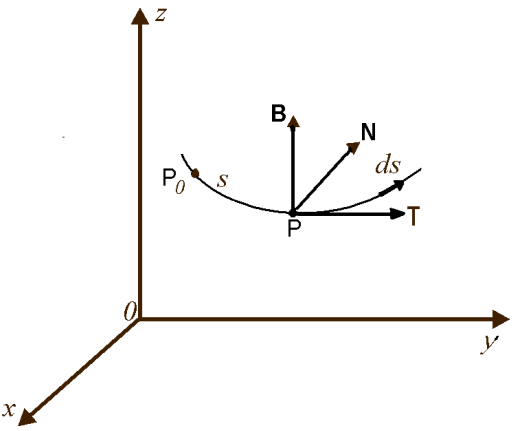

Figura 1.3. Vectores notables de la curva c, caracterizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $\rho = 1/k$ es el radio de curvatura. $\mathbf{N}$ es el vector normal a la curva, $\mathbf{T}$ el vector tangente y $\mathbf{B}$ vector de la binormal.

1.5. Gradiente, divergencia y rotacional

Definimos al operador diferencial vectorial ∇ (nabla) con la siguiente expresión:

$$\nabla = \widehat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad , \tag{1.38}$$

con él, definimos al vector gradiente de un campo escalar $\phi\,(x, y, z)$[6]

$$grad\ \phi = \nabla\phi = \widehat{i}\frac{\partial}{\partial x}\phi + \widehat{j}\frac{\partial}{\partial y}\phi + \widehat{k}\frac{\partial}{\partial z}\phi\ , \tag{1.39}$$

que resulta en un vector.

La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{A}$, es el producto in-

[6]Este campo puede o no ser dependiente del tiempo.

terno con el operador nabla:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\widehat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{k}\right),$$
$$div\ \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right), \tag{1.40}$$

la divergencia de un vector es un escalar, a este escalar se le conoce como la fuente del campo $\mathbf{A}$.

El rotacional de un vector se define por el siguiente producto vectorial,

$$\begin{aligned} rot\ \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\widehat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{k}\right) \\ &= \widehat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \widehat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \\ &+ \widehat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{1.41}$$

que es un vector, el rotacional usualmente se le llama la circulación del campo vectorial.

Se define también el operador laplaciano como la divergencia del gradiente,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad , \tag{1.42}$$

de tal forma que el laplaciano de un campo escalar resulta ser un escalar

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \tag{1.43}$$

y el de un vector resulta en un vector

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}.$$

Aplicado a campos escalares ϕ y vectoriales $\mathbf{A}$ el operador ∇ en forma de producto escalar o vectorial permite obtener

una colección de propiedades, algunas de ellas las listamos a continuación:

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi\cdot\mathbf{A} + \phi\nabla\cdot\mathbf{A}\\
&\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi\times\mathbf{A} + \phi\nabla\times\mathbf{A}\\
&\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\\
&\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) +\\
&\qquad\qquad + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
&\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} +\\
&\qquad\qquad + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}\\
&\nabla\times\nabla\phi = 0\\
&\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0\\
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Siguiendo la misma definición de la derivada, las diferenciales de un producto escalar y un producto vectorial son:

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= d\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot d\mathbf{B}\\
d(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= d\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times d\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)\,;\quad d\mathbf{A} = \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}dz\,.$

1.6. Teoremas de Stokes, de Gauss, de Green y de Helmholtz

La integral indefinida de un vector se define por la siguiente relación:

$$\mathbf{R}(u) = \int\mathbf{A}(u)\,du = \widehat{i}\int A_x(u)\,du + \widehat{j}\int A_y(u)\,du + \tag{1.46}$$

$$+\,\widehat{k}\int A_z(u)\,du \tag{1.47}$$

de forma tal que este campo vectorial $\mathbf{R}$ satisface la condición usual,

$$\frac{d}{du}\mathbf{R}\left(u\right)=\mathbf{A}\left(u\right). \tag{1.48}$$

Integrales de línea

Si escribimos al vector de posición como función de un parámetro u, $\mathbf{r}=x\left(u\right)\widehat{i}+y\left(u\right)\widehat{j}+z\left(u\right)\widehat{k}$, este parámetro define una curva c entre los puntos

$$P_1\left(x\left(u_1\right),\,y\left(u_1\right),\,z\left(u_1\right)\right)$$
$$P_2\left(x\left(u_2\right),\,y\left(u_2\right),\,z\left(u_2\right)\right),$$

de esta manera el vector $\mathbf{A}=A_1\left(x,y,z\right)\widehat{i}+A_2\left(x,y,z\right)\widehat{j}+A_3\left(x,y,z\right)\widehat{k}$, está definido sobre la curva c en términos del parámetro u. La integral del producto escalar del vector $\mathbf{A}$ y la diferencial $\mathbf{dr}$ sobre la curva c entre los puntos P_1 y P_2 está dada por la siguiente expresión:

$$\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_c\left(A_1dx+A_2dy+A_3dz\right) \tag{1.49}$$
$$=\int_{u_1}^{u_2}\left(A_1dx+A_2dy+A_3dz\right). \tag{1.50}$$

Si el punto P_2 recorre una curva cerrada c y regresa al punto P_1, (c es simplemente cerrada) se define la integral cerrada de línea de $\mathbf{A}$ a lo largo de la curva c por la siguiente ecuación

$$\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\oint_c\left(A_1dx+A_2dy+A_3dz\right) \tag{1.51}$$

a esta integral también se le llama la *circulación de A sobre la curva c.*

En el caso en el que $\mathbf{A}=\nabla\phi$, con ϕ un campo escalar, para toda curva c_i entre P_1 y P_2, sucede que

$$\int_{c_1\,P_1}^{P_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_{c_2\,P_1}^{P_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_{P_1}^{P_2}\nabla\phi\cdot d\mathbf{r}=\phi(P_2)-\phi(P_1) \tag{1.52}$$

se dice entonces que $\mathbf{A}$ es un *campo conservativo* e igualmente sucede que,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0, \tag{1.53}$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.54}$$

el rotacional del gradiente de un campo escalar es siempre nulo, la diferencial del campo escalar ϕ es exacta

$$\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi. \tag{1.55}$$

Esto es, si $\mathbf{A}$ puede escribirse como el gradiente de una función escalar ϕ, entonces $d\phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es una diferencial exacta, pues,

$$A_x = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ A_y = \frac{\partial \phi}{\partial y},\ A_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{1.56}$$

Integrales de superficie

Análogamente podemos definir la integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$. Si S es una superficie cuya normal positiva se define de acuerdo a la regla de la mano derecha (figura 1.4.), y siendo $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ el elemento diferencial de área en esta superficie con $\mathbf{n}$ un vector unitario en la dirección de la normal a la superficie[7].

La superficie S se puede definir en términos de dos parámetros u, v, de tal forma que cualquier punto sobre esta superficie se puede identificar por un vector de posición $\mathbf{r}(x, y, z)$ y cada componente cartesiana es de la forma $x_i = x_i\,(u, v)$, los parámetros u, v están definidos en algún intervalo $u \in [u_1, u_2]$, $v \in [v_1, v_2]$. Por ejemplo: un sector esférico de radio a se define por el vector de posición $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r} &= x\,(u, v)\,\widehat{i} + y\,(u, v)\,\widehat{j} + z\,(u, v)\,\widehat{k} \\ x &= a \cdot \text{sen}u \cdot \cos v \\ y &= a \cdot \text{sen}u \cdot \text{sen}v \qquad\qquad u \in [u_1, u_2] \\ z &= a \cdot \cos u \qquad\qquad v \in [v_1, v_2]\,. \end{aligned} \tag{1.57}$$

[7] Comúnmente se usa ds, dl o dr para el elemento diferencial de arco mientras que dS o dA para el elemento diferencial de área.

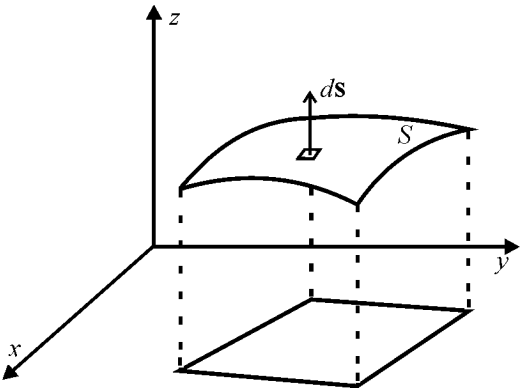

Figura 1.4. Una superficie S en el espacio tridimensional, $d\mathbf{S}$ es el elemento de área sobre esta superficie, su dirección se define de acuerdo al sentido positivo de circulación.

En este caso u, v corresponden a los ángulos zenital y azimutal respectivamente.

Se define la integral de superficie del campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ por la siguiente expresión,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{1.58}$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS \tag{1.59}$$

Esta integral se llama *el flujo de A en S*. Otras integrales de superficie de interés son las siguientes

$$\int_S \phi \mathbf{n} dS\ , \quad \int_S \phi dS\ . \tag{1.60}$$

La primera integral es un vector mientras que la segunda es un escalar. Igualmente se pueden escribir las integrales cerradas (cuando la superficie es cerrada), por ejemplo,

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \tag{1.61}$$

Este flujo es un escalar.

Integrales de volumen
Finalmente, podemos definir varios tipos de integrales de volumen de un campo escalar o de un campo vectorial, por ejemplo:

$$\int \mathbf{A}\, dV = \int_V \mathbf{A}\, dxdydz \tag{1.62}$$

y

$$\int \phi\, dV = \int_V \phi\, dxdydz. \tag{1.63}$$

Relacionados con integrales de vectores y escalares hay tres teoremas de gran utilidad, que listaremos a continuación:

El teorema de Stokes se establece así: *si S es una superficie limitada por la curva c (curva simple cerrada), y A es un campo vectorial continuo con derivadas continuas tanto en la superficie como en su frontera, entonces:*

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(Teorema de Stokes)}, \tag{1.64}$$

la curva c se recorre en la dirección positiva y es la frontera de la superficie S, $d\overrightarrow{\ell}$ es la diferencial del elemento de línea a lo largo de la curva c mientras que $d\mathbf{S}$ es la diferencial del elemento de área de esa superficie.

El teorema de la divergencia o teorema de Gauss se puede escribir de la siguiente forma: s*i la superficie cerrada S encierra el volumen V, el campo vectorial $\mathbf{A}$ es continuo y con derivadas continuas tanto en V como en su frontera S; entonces se satisface la siguiente igualdad:*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(Teorema de Gauss)}, \tag{1.65}$$

el elemento de área $d\mathbf{S}$ apunta en la dirección positiva (en este caso hacia afuera del volumen V).

La forma simétrica del teorema de Green se escribe como sigue: *para dos funciones* ϕ y ψ *continuas y con derivadas continuas definidas en el espacio tridimensional, siendo el volumen* V *y su frontera* S, *se cumple que:*

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \oint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S} \quad \text{(Teorema de Green)}, \tag{1.66}$$

donde la superficie S es la frontera del volumen V. Para dos funciones en el plano $M(x,y)$ y $N(x,y)$, este teorema se puede escribir así:

$$\oint_c (Mdx + Ndy) = \int_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.67}$$

nuevamente c es la frontera de la región S.

Otros teoremas de utilidad e interés son:

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\, dV = \int_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A} \tag{1.68}$$

$$\int_c \phi\, d\mathbf{s} = \int_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi \tag{1.69}$$

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\right) dV = \int_S (\phi\nabla\psi)\cdot dS \tag{1.70}$$

Finalmente, estableceremos, sin demostración, el teorema de Helmholtz[8] *Un campo vectorial* $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ *está completamente determinado por sus fuentes* $\rho(x,y,z,t)$ *y sus circulaciones* $\mathbf{c}(x,y,z,t)$, *con la condición de que los campos, escalar* ρ *y vectorial* $\mathbf{c}$, *sean finitos en todo punto del espacio y se anulen en el infinito.*

[8]Una demostración simple de este teorema puede consultarse en las referencias: [39, 29].

Por fuentes y circulaciones entenderemos respectivamente la divergencia y el rotacional del campo vectorial, la fuente es un campo escalar y la circulación es un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho, \tag{1.71}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(x, y, z, t). \tag{1.72}$$

Con estas definiciones, el campo vectorial $\mathbf{F}$ está dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1.73}$$

donde

$$\phi(\mathbf{r},t) = \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(x', y', z', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{1.74}$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(x', y', z', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \tag{1.75}$$

El punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ se llama el punto campo, el punto donde se mide o está definido el campo vectorial $\mathbf{F}$, mientras que $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ es el punto fuente, donde están definidas las circulaciones y las fuentes del campo. A la función $\phi(\mathbf{r},t)$ se le llama el potencial escalar mientras que $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ es el potencial vectorial; ambos, asociados al campo vectorial $\mathbf{F}$. Este teorema es de gran utilidad en la física y encontraremos frecuentes referencias a él. Este teorema también se conoce como el teorema fundamental del cálculo vectorial.

1.7. Cinemática de una partícula

Con las definiciones y propiedades vectoriales descritas en las secciones anteriores, podemos definir las cantidades que identifican el movimiento de una partícula puntual: su posición, su

velocidad y su aceleración[9]. La trayectoria de una partícula puntual en el espacio tridimensional se identifica por la posición $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$, es decir, la trayectoria se describe en forma paramétrica con el tiempo t como parámetro libre.

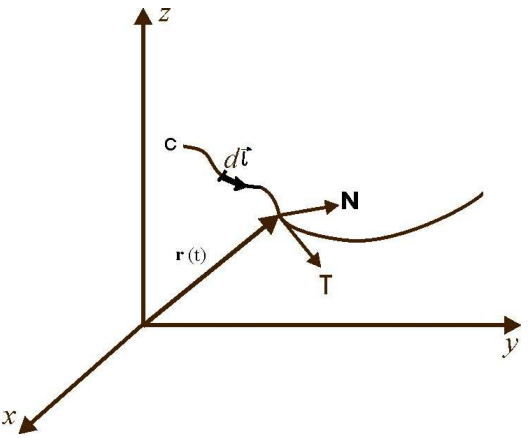

Figura 1.5. Trayectoria de una partícula puntual en el espacio tridimensional.

La velocidad instantánea de la partícula es la razón de cambio de su posición con el tiempo, *i.e.*,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\widehat{i} + \dot{y}\widehat{j} + \dot{z}\widehat{k}.$$

Las componentes de la velocidad se denotan por $v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y}$ y $v_z = \dot{z}$; equivalentemente,

$$\mathbf{v} = v_x\widehat{i} + v_y\widehat{j} + v_z\widehat{k}. \tag{1.76}$$

La magnitud de la velocidad se llama rapidez y se denota por v

$$v = |\mathbf{v}| = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{1/2}. \tag{1.77}$$

[9]Una partícula puntual es un cuerpo material cuyo movimiento puede describirse totalmente por el de un punto $P(x, y, z)$, ver capítulo 2.

La velocidad también puede calcularse de la siguiente forma,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt},$$

donde $d\ell$ es el elemento de arco en la trayectoria (ver figura 1.5.). De acuerdo a las ecuaciones (1.36), también podemos escribir que

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T} \tag{1.78}$$

donde v es la magnitud de la velocidad y $\mathbf{T}$ el vector unitario tangente a la curva.

La aceleración instantánea de una partícula puntual la definimos como la razón de cambio de su velocidad con el tiempo. Derivando la ecuación (**??**) respecto del tiempo t, obtenemos que el vector de aceleración es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{1.79}$$

$$\mathbf{a} = a_x\widehat{i} + a_y\widehat{j} + a_z\widehat{k} = \ddot{x}\widehat{i} + \ddot{y}\widehat{j} + \ddot{z}\widehat{k}\,. \tag{1.80}$$

A su vez, derivando la ecuación (1.78) obtenemos que la aceleración puede escribirse como sigue,

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} \tag{1.81}$$

y arreglando términos,

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N} \tag{1.82}$$

donde $\mathbf{N}$ es el vector normal y ρ el radio de curvatura de la trayectoria (ver figura (1.5.)), su norma vale,

$$|a| = \left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}\right)^{1/2} \tag{1.83}$$

El vector de aceleración tiene dos componentes: $\dot{v}$ en la dirección tangente a la curva y v^2/ρ en la dirección normal, ésta es la

llamada aceleración centrípeta. En el caso de un movimiento en el plano, la expresión (1.81) es fácilmente interpretable, las componentes de la aceleración son: una componente tangencial $\dot{v}$ y una radial v^2/ρ en la dirección del máximo radio de curvatura.

Si el movimiento es tal que la aceleración sólo tiene componente normal a la curva, y este vector tiene magnitud constante en la dirección de la normal **N**, se trata de un movimiento circular uniforme.

Para el movimiento en un plano y usando coordenadas polares el vector de posición se escribe como sigue:

$$\mathbf{r} = r\widehat{u}_r, \tag{1.84}$$

donde r es la magnitud del vector de posición y $\widehat{u}_r$ es un vector unitario en la dirección de **r**. De esta manera lavelocidad resulta (ver figura 1.6.),

$$v = \frac{d}{dt}\left(r\widehat{u}_r\right) = \dot{r}\widehat{u}_r + r\frac{d}{dt}\widehat{u}_r, \tag{1.85}$$

$$\widehat{u}_r = \cos\theta\widehat{i} + \text{sen}\theta\widehat{j} \tag{1.86}$$

$$\widehat{u}_\theta = -\text{sen}\theta\widehat{i} + \cos\theta\widehat{j} \tag{1.87}$$

Δu_r es un vector perpendicular a $\widehat{u}_r$, por tanto, $\Delta\widehat{u}_r = \Delta\theta\widehat{u}_\theta$ y $\frac{d\widehat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\widehat{u}_\theta$ donde $\widehat{u}_\theta$ es el vector unitario perpendicular a $\widehat{u}_r$ en la dirección de crecimiento de θ, con este resultado podemos escribir que

$$\mathbf{v} = \dot{r}\widehat{u}_r + r\dot{\theta}\widehat{u}_\theta. \tag{1.88}$$

Definimos la aceleración en el plano polar como la razón de cambio de la velocidad con el tiempo, *i.e.*:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{1.89}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta u_\theta \approx |u_r|\,\Delta\theta$, $\frac{d\widehat{u}_\theta}{dt} = -\widehat{u}_r\frac{d\theta}{dt}$ y derivando la ecuación (1.88) obtenemos el vector aceleración.

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\widehat{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\widehat{u}_\theta. \tag{1.90}$$

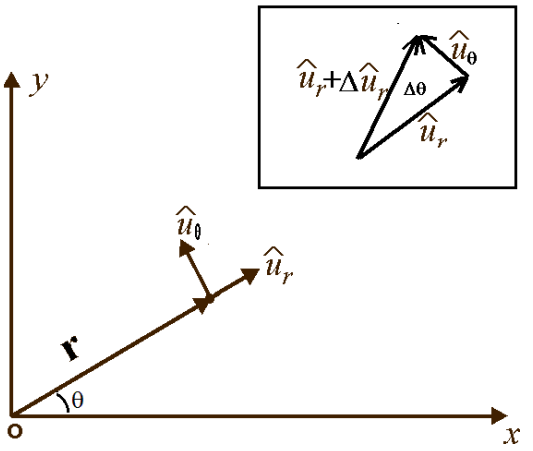

Figura 1.6. Vectores unitarios en coordenadas polares, $\widehat{u}_r$ y $\widehat{u}_\theta$ apuntan en la dirección de máximo crecimiento de r y θ respectivamente. En el recuadro se muestra la variación del vector $\widehat{u}_r$.

Para expresar la velocidad y la aceleración en un sistema de coordenadas esférico, definimos primero la transformación entre éste y el sistema cartesiano x, y, z.

$$\begin{aligned} x &= r\text{sen}\,\theta\cos\phi, & r &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}, \\ y &= r\text{sen}\,\theta\ sen\,\phi, & \phi &= tg^{-1}\tfrac{y}{x}, \\ z &= r\ \cos\theta, & \theta &= tg^{-1}\tfrac{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}{z}. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Definimos también a los vectores unitarios, mutuamente ortogonales en el sistema de coordenadas esférico, cada uno de ellos en la dirección de máximo crecimiento de la variable correspondiente (ver figura 1.7.),

Estos vectores forman un conjunto ortonormal (ortogonal y de magnitud unidad) y están definidos por las siguientes igual-

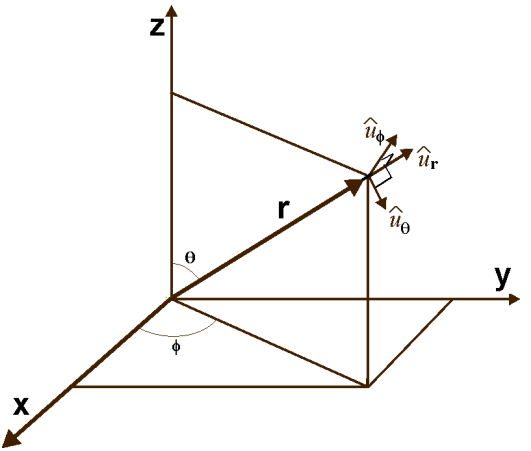

Figura 1.7. Definición de los vectores unitarios en coordenadas esféricas.

dades:

$$\widehat{u}_r = \text{sen}\theta\cos\phi\widehat{i} + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k} = -\frac{\partial\widehat{u}_\theta}{\partial\theta}$$

$$\widehat{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\widehat{i} + \cos\theta\text{sen}\phi\widehat{j} - \text{sen}\theta\widehat{k} = \frac{\partial\widehat{u}_r}{\partial\theta}$$

$$\widehat{u}_\phi = -\text{sen}\phi\widehat{i} + \cos\phi\widehat{j} = \frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial\widehat{u}_r}{\partial\phi}$$

$$|\widehat{u}_r| = |\widehat{u}_\phi| = |\widehat{u}_\theta| = 1, \tag{1.92}$$

$$\widehat{u}_r \cdot \widehat{u}_\phi = \widehat{u}_\phi \cdot \widehat{u}_\theta = \widehat{u}_\theta \cdot \widehat{u}_r = 0, \tag{1.93}$$

$$\widehat{u}_\phi \times \widehat{u}_r = \widehat{u}_\theta\,, \quad \widehat{u}_\theta \times \widehat{u}_\phi = \widehat{u}_r\,, \quad \widehat{u}_r \times \widehat{u}_\theta = \widehat{u}_\phi.$$

Con estas relaciones, el cálculo de la velocidad y de la aceleración en este sistema coordenado se vuelve sencillo,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\widehat{u}_r)\,,$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\widehat{u}_r + r\frac{d\widehat{u}_r}{dt}\,, \tag{1.94}$$

también se puede escribir así:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\widehat{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\widehat{u}_\theta \;\; + r\;sen\;\theta\;\dot{\phi}\widehat{u}_\phi \quad . \tag{1.95}$$

Para la aceleración tendremos que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \ddot{r}\,\widehat{u}_r + \dot{r}\frac{d\widehat{u}_r}{dt} + r\text{sen}\theta\ddot{\phi}\widehat{u}_\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\widehat{u}_\phi \\ &+ \dot{r}\text{sen}\theta\dot{\phi}\widehat{u}_\phi + r\text{sen}\theta\dot{\phi}\frac{d}{dt}\widehat{u}_\phi + \dot{r}\dot{\theta}\widehat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\widehat{u}_\theta + \\ &+ r\,\dot{\theta}\frac{d}{dt}\,\widehat{u}_\theta,\end{aligned} \tag{1.96}$$

haciendo las derivadas[10] y arreglando términos también podemos escribir que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \widehat{u}_r &\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^{\,2}\,\text{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^{\,2}\right) \\ &+ \widehat{u}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^{\,2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r\,\ddot{\theta}\right) \\ &+ \widehat{u}_\phi\left(2\dot{r}\dot{\phi}\text{sen}\,\theta + r\ddot{\phi}\text{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right).\end{aligned} \tag{1.97}$$

Con estas definiciones y propiedades cinemáticas estamos en posibilidad de describir la dinámica de los sistemas macroscópicos.

[10] Estas derivadas pueden realizarse directamente de las ecuaciones 1.92.

1.8. Ejercicios

1. Exprese la masa del Sol y el año terrestre en el sistema natural de unidades (SN). ¿Cuánto vale un segundo en unidades naturales?

2. Suponga un sistema de tres vectores base unitarios $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$, $\widehat{u}_3$ linealmente independientes pero no ortogonales, construya a partir de ellos un sistema ortonormal.

3. Demuestre que el área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es igual a $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

4. Demuestre que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$

5. Tome el caso particular de una rotación cuyo eje de giro es el eje z y demuestre que la magnitud de un vector es invariante ante una rotación de los ejes coordenados.

6. Dibuje la curva $x = \cos t, \;\; y = \operatorname{sen} t, \;\; z = t$. Calcule los vectores tangente $\mathbf{T}$, normal $\mathbf{N}$ y binormal $\mathbf{B}$.

7. Demostrar la validez del conjunto de ecuaciones (1.44).

8. Una partícula se mueve en la trayectoria definida por el parámetro tiempo t, tal que las coordenadas cartesianas son:

$$x(t) = a\cos\alpha t, \qquad y(t) = b\operatorname{sen}\alpha t, \qquad z(t) = c\ a\ t.$$

   α es una constante con dimensiones $[\alpha] = s^{-1}$. a) Dibuje la trayectoria. b) Encuentre los vectores tangente $\mathbf{T}$, normal $\mathbf{N}$ y binormal $\mathbf{B}$, para todo punto de la trayectoria. c) Si el parámetro t es el tiempo, calcule la velocidad y la aceleración en coordenadas cartesianas. d) Si $a = b$ y $c = 0$ calcule los vectores de velocidad y aceleración y demuestre que este es un movimiento circular uniforme, calcule su velocidad angular de rotación.

9. Obtenga una expresión para la velocidad y la aceleración usando coordenadas cilíndricas, cuya regla de transformación es:

$$x = \rho\cos\phi,\ \ y = \rho\ sen\ \phi,\ \ z = z,$$
$$\rho = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2},\ \phi = tg^{-1}y/x.$$

para ello obtenga primero los vectores unitarios en esta base.

10. Si los vectores unitarios en el sistema de coordenadas esférico son:

$$\widehat{u}_r = \widehat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \widehat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \widehat{k}\cos\theta$$
$$\widehat{u}_\theta = \widehat{i}\cos\theta\cos\phi + \widehat{j}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - \widehat{k}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\widehat{u}_\phi = -\widehat{i}\,\mathrm{sen}\,\phi + \widehat{j}\cos\phi.$$

a) Demuestre que es un sistema ortogonal y que forma una base en tres dimensiones. b) Obtenga una expresión para la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas.

2

LEYES DEL MOVIMIENTO

Este capítulo lo dedicamos al estudio de los fundamentos de la teoría newtoniana del movimiento. Establecemos las definiciones y principios básicos de la mecánica y los aplicamos al estudio de diversas leyes del movimiento. Aplicando el método experimental a varios sistemas mecánicos sencillos obtenemos sus funciones de fuerza. Con las leyes de fuerza obtenidas estudiamos: El movimiento de proyectiles, Sistemas vibrantes y Las fuerzas electromagnéticas. Desarrollamos: El teorema trabajo-energía, La conservación de la energía mecánica, Y la del momento angular. Para ampliar este tema se recomiendan las referencias: [1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 16]

2.1. Principio de relatividad de Galileo y leyes de Newton

Como punto de partida es necesario especificar el sistema de observación en el que describiremos el movimiento de los objetos, al cual llamaremos el sistema de referencia. Por sistema de referencia entendemos a un sistema de observación dotado de aparatos de medición para distancia, tiempo, masa, carga, etc. En él, medimos las variables dinámicas como velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc.
Una vez que disponemos de un sistema de referencia establecemos el primer principio de la mecánica[1]. el *Principio de Relatividad de Galileo* La forma usual de establecerlo es la siguiente:

[1]Llamaremos principio físico a aquella aseveración que proviene de la

las leyes que describen el comportamiento de la naturaleza toman la misma forma para dos sistemas de observación que se mueven, uno respecto del otro con velocidad constante.
Este principio representa un buen punto de partida, pues garantiza que la descripción de los sistemas físicos no requiere de un sistema de observación absoluto, sino que esta descripción será la misma para todos aquellos sistemas que tengan un movimiento relativo rectilíneo y uniforme. Sin embargo, este principio no dice cuales sistemas de referencia serían los más apropiados en los que la descripción sería más sencilla.

La transformación que conecta a las variables de tiempo y espacio entre estos sistemas de observación se conoce con el nombre de transformación galileana. Si la velocidad relativa es u y está dirigida a lo largo del eje x de ambos sistemas de referencia y los dos orígenes coinciden cuando se empieza a medir el tiempo ($t = t' = 0$), la transformación es (ver figura 2.1.):

$$\begin{aligned} x &= x' + ut \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es conveniente hacer dos comentarios:

a) Al igual que todos los principios físicos, este principio fue obtenido de observaciones directas sobre fenómenos naturales. En su libro, diálogos sobre dos nuevas ciencias, Galileo Galilei [47, 48, 57] describe un experimento con el que resume sus múltiples observaciones hechas para establecer este principio.

b) En la transformación galileana el tiempo medido por ambos sistemas de referencia evoluciona de la misma manera, es decir, $\Delta t = \Delta t'$. Este hecho no subsiste en la *teoría de la*

síntesis de un gran número de experimentos. Estos principios no pueden ser obtenidos en el contexto de la teoría.

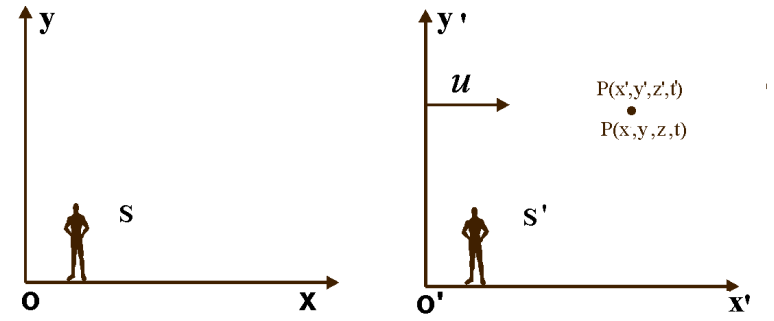

Figura 2.1. Dos sistemas de referencia observan un evento en el punto P y en el instante t, cada uno de ellos usa el sistema internacional de medición para describirlo; el observador en S se mide P(x,y,z,t), mientras que en S' el evento se caracteriza por P(x',y',z',t).

relatividad de Einstein; la razón por la cual Galileo supuso este comportamiento fue que en su época no había ninguna evidencia experimental que señalase lo contrario. Fue necesario un experimento fundamental en la física para poder introducir este hecho, el experimento de Michelson y Morley [57].

El principio es muy útil cuando se introduce el concepto de *sistema inercial*. El que aquí hemos transcrito, es la forma original en que fue presentado; una formulación más lógica, la que actualmente es aceptada, puede verse en la referencia [57][2].

Partícula puntual

Un concepto necesario es el de partícula puntual: una *partícula puntual* es aquel sistema físico que podemos describir completamente con las coordenadas de un punto referidas a un sistema de referencia cualquiera . En otras palabras es aquel objeto que

[2]Si incluimos el concepto de sistema inercial, podemos escribir el principio galileano de relatividad como sigue: *Las ecuaciones de movimiento son las mismas en todos los sistemas inerciales de referencia.*

podemos describir por la posición de un punto en el espacio en cada instante del tiempo.

Pasamos ahora a establecer las leyes del movimiento, también llamadas leyes de Newton . La forma tradicional de éstas, que puede encontrarse en casi cualquier libro de texto, contienen tres leyes fundamentales: la ley de la inercia, ley de la fuerza y la ley de acción y reacción. En la forma usual de presentar las leyes del movimiento aparecen una serie de objeciones lógicas causadas por la falta de una definición apropiada de los conceptos de masa y fuerza. A continuación mencionaremos algunas de estas dificultades: La primera ley de Newton asegura que si sobre una partícula no se ejerce fuerza, dicha partícula permanecerá en reposo o su movimiento será rectilíneo con rapidez constante; sin embargo, no se ha definido el concepto de fuerza ni su forma de medirla, por lo tanto, no puede garantizarse que sobre la partícula no se aplica fuerza, usualmente tampoco se especifica la forma de medir la fuerza; podría suceder que el sistema de observación seleccionado se mueva con la partícula, donde, a pesar de que sobre la partícula actúe una fuerza, desde ese sistema de observación, ésta permanece en reposo. Mas aún, ¿por qué establece Newton esta ley de manera independiente si es un simple caso particular de la segunda? En cuanto a la segunda ley, la cual establece que la fuerza sobre una partícula es igual al producto de la masa por su aceleración, cabe preguntar ¿qué es la masa de un objeto? y ¿cómo medimos la fuerza?, Newton definía a la masa como el contenido de materia que era igual a la densidad por su volumen, definición que resulta insatisfactoria. Si no están claramente definida la fuerza y la masa ¿qué información proporciona la segunda ley de Newton sobre el comportamiento de la naturaleza? Es de esperarse que Newton estuviera al tanto de estas dificultades, sin embargo, no hizo aclaración alguna. Probablemente esperaba que su teoría, al ser aplicada a ejemplos concretos, aclararían dichos conceptos. Estos hechos no demeritan a la teoría newtoniana del movimiento, a pesar de estas objeciones, estas leyes proporcionan una ecua-

ción de movimiento que en la práctica ha funcionado muy bien para describir el movimiento de cuerpos macroscópicos[3].

Fue hasta fines del siglo XIX cuando algunos críticos de Newton analizaron la formulación newtoniana y proporcionaron alternativas para un establecimiento más consistente de las leyes del movimiento. Destacan, entre otros, los trabajos de Poincaré, Kirchhoff, Hertz y Mach[4]. Poincaré fue un duro crítico del concepto newtoniano de fuerza, mientras que Hertz prefirió reformular las leyes de la mecánica en su texto *Principios de la mecánica*. Para Kirchhoff y Mach la segunda ley de Newton es sólo una definición de fuerza mientras que la ecuación de movimiento la proporciona la ley de fuerza correspondiente. Según ellos, la tercera ley proporciona una definición para la masa, mientras que la primera ley la sustituyen por la definición de sistema inercial.

A principios del siglo XX, con el surgimiento de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica, los conceptos newtonianos de tiempo y espacio, así como de otras propiedades físicas, fueron extensamente revisados y criticados. Son diversas las reformulaciones que se han hecho de las leyes del movimiento. En los siguientes párrafos presentamos una formulación que trata de superar las objeciones a la formulación original de Newton contenida en los dos famosos volúmenes de *Mathematical principles of natural philosophy* [49].

Nuestra presentación está motivada y sugerida por el trabajo de L. Eisembud [61] así como los textos de L. Page [60] y E. Saletan y A. Cromer [16].

Definimos primero el concepto de *partícula puntual aislada*. Es aquel objeto suficientemente pequeño, tal que puede ser identificado por un punto en el espacio y que se encuentra su-

[3]Cuya velocidad sea pequeña comparada con la velocidad de la luz, a estos objetos los llamaremos objetos clásicos. La teoría de Newton deberá reemplazarse por la teoría relativista cuando no se cumpla esta condición.

[4]Para el lector interesado en este punto recomendamos las siguientes referencias: [16, 53, 54, 59, 60, 62]

ficientemente alejado de todo el resto de la materia. Aislamiento significa que no hay objetos materiales en su vecindad que puedan afectar su movimiento cualquiera que éste sea. Con este concepto podemos establecer el primer principio de la mecánica:

Principio 1. Existen sistemas de referencia en los cuales toda partícula puntual aislada se mueve en una línea recta con rapidez constante.

A este sistema de referencia se le llama inercial (SIR) y la experiencia demuestra que este tipo de sistemas son los más simples para describir el movimiento. Con esta propiedad de las partículas aisladas es posible definir la escala de tiempo: una partícula aislada en un SIR recorre intervalos espaciales iguales en tiempos iguales. Esta propiedad del sistema inercial y de la escala de tiempo garantiza que una segunda partícula aislada en ese SIR también se mueve en línea recta con rapidez constante, haciendo que la definición de tiempo no dependa de la partícula con la que se define. Si aceptamos la idea de Mach de que la primera ley de Newton define a un SIR, este principio es entonces una simple reformulación de la primera ley de Newton.

Una generalización de multiples resultados experimentales realizados en un SIR nos conducen a establecer el siguiente principio:

Principio 2. Medidas desde un SIR, dos partículas aisladas del resto de la materia, que sólo interaccionan entre sí, tienen movimiento tal que siempre es posible encontrar dos escalares constantes m_1 y m_2, *de tal forma que puede construirse un vector constante,*

$$m_1\mathbf{v}_1(t) + m_2\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{P}. \tag{2.2}$$

También se le llama el principio de *conservación del momento lineal*[5]. Las constantes m_1 y m_2 definen las masas inerciales de

[5] Que interaccionan entre sí significa que el movimiento de cada partícula

las partículas, $\mathbf{P}$ se llama el *momento lineal* del sistema de dos partículas $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Para definir unívocamente a las masas es necesario realizar al menos dos experimentos sobre el mismo sistema y usar a una de ellas como patrón de masa y la otra definirla en términos de este patrón.

Definición de fuerza: En un sistema inercial de referencia (SIR), la *fuerza* que actúa sobre una partícula de masa m con velocidad instantánea $\mathbf{v}$, se define por

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} \tag{2.3}$$

que es equivalente a la siguiente definición.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t). \tag{2.4}$$

El vector fuerza es proporcional a la aceleración, siendo la masa la constante de proporcionalidad. Esta definición permite *medir* la fuerza que está actuando sobre cualquier objeto, a condición de que midamos su trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; el parámetro que define a la trayectoria es el tiempo t. Si el sistema de referencia donde se mide la fuerza es un sistema inercial y la partícula es una partícula puntual aislada, el *principio 1* garantiza que sobre esa partícula no está actuando fuerza alguna. Por el contrario, si en un SIR la partícula no se mueve en una línea recta o su rapidez no es constante, entonces, sobre ese objeto está actuando una fuerza, cuya magnitud y dirección son proporcionadas por esta definición. Las ecuaciones (2.3) y (2.1) nos garantiza que dos sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa constante miden la misma fuerza, por lo tanto, satisfacen el principio de relatividad de Galileo. Si el sistema de referencia no es inercial, esta definición de fuerza es aplicable pero la fuerza medida se tiene que relacionar con el movimiento del sistema de

sólo puede ser influenciado por el movimiento y las propiedades de la otra partícula. El nombre que dió Newton a este vector $\mathbf{P}$ fue el de cantidad de movimiento.

referencia, lo cual hace difícil establecer leyes de fuerza (vea la siguiente sección y el capítulo 3); esta es la razón por la cual los sistemas de referencia inerciales son los más apropiados pues en ellos la dinámica toma su forma más simple.

Con esta definición de fuerza podemos probar que el principio *2* es equivalente a la tercera ley de Newton, si derivamos con respecto del tiempo la expresión (2.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d}{dt}\mathbf{v}_1(t) + m_2 \frac{d}{dt}\mathbf{v}_2(t) &= 0 \\ m_1 \mathbf{a}_1(t) + m_2 \mathbf{a}_2(t) &= 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

lo cual es completamente equivalente a la ley de acción y reacción de Newton: *dos partículas aisladas observadas desde un SIR tienen interacciones tales que la fuerza que ejerce la primera sobre la segunda es igual a la que ejerce la segunda sobre la primera pero en sentido opuesto, ambas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea que une a las partículas*[6]*,. Esto se puede escribir formalmente como sigue:*

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \frac{d}{dt}\mathbf{v}_1 = -m_2 \frac{d}{dt}\mathbf{v}_2 = -\mathbf{F}_{21} \tag{2.6}$$

La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula 1 debido a su interacción con la partícula 2, análogamente $\mathbf{F}_{21}$ es la fuerza sobre la partícula 2 debido a la partícula 1.

Podemos ahora establecer el principio para la fuerza.

Principio 3. En un SIR, la fuerza que actúa sobre una partícula puede ser univocamente correlacionada con los hechos observables de sus vecindades, las propiedades observables de la partícula así como con su posición, su velocidad y el tiempo, esto es :

[6]En la naturaleza, encontramos casos donde esta última parte del enunciado no se cumple; por ejemplo, las fuerzas electromagnéticas suelen ser tales que la acción es igual a la reacción y opuesta a ella pero estas fuerzas suelen no encontrarse a lo largo de la línea que une a las partículas.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}, \alpha, \beta,..., t). \tag{2.7}$$

A esta función vectorial se le llama la función fuerza y es usual llamar a este principio *la ley de la fuerza; los parámetros* $\alpha, \beta, ...$ caracterizan a las vecindades y las propiedades de las partícula. Si el sistema de referencia no es un SIR, es necesario hacer correcciones no inerciales a este principio, estudio que pospondremos hasta el siguiente capítulo. Este principio asegura que el movimiento de los objetos tiene una causa (la fuerza) de tal forma que la acción del medio sobre las partículas y sus propiedades condicionan su movimiento (el efecto)[7]. Ejemplos de las aplicaciones de este principio son las siguientes leyes de fuerza:

a) Dos cuerpos masivos, el Sol y un planeta, están sujetos a la *atracción gravitacional* y la fuerza sobre cualquiera de ellos cumple este principio (ver la siguiente sección).

b) Dos partículas cargadas interaccionan de acuerdo a la *ley de Coulomb.*

c) Una partícula en el extremo de un resorte obedece la *ley de elasticidad de Hooke.*

En estos ejemplos, la ley de fuerza en cada caso es: la atracción gravitacional, la ley de Coulomb y la ley de Hooke.

Si ahora combinamos este principio con la definición de fuerza tendremos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}, \alpha, \beta, ..., t) = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t). \tag{2.8}$$

Ésta es una ecuación diferencial de la cual podemos calcular la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ si conocemos la ley de fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}, \alpha, \beta, ..., t)$.

[7]Este es el principio de causalidad, en el que a una causa determinada $\mathbf{F}$ le corresponde un efecto determinado $\mathbf{r}(t)$.

Además, debido a que es una ecuación diferencial de segundo orden, es necesario conocer dos constantes de integración, la posición y velocidad del objeto en algún instante del tiempo t_0, *i.e.*, sus condiciones iniciales $\mathbf{r}(\mathbf{t}_0), \mathbf{v}(\mathbf{t}_0)$ o equivalentemente la posición (o la velocidad) en dos instantes de tiempo $\mathbf{r}(\mathbf{t}_1)$ y $\mathbf{r}(\mathbf{t}_2)$.
De aquí en adelante nos referiremos a la ecuación (2.8) como la segunda ley de Newton. Notemos que esta ecuación puede ser usada de dos formas: *a*) Si conocemos la trayectoria de la partícula $\mathbf{r}(t)$ derivando podremos conocer la fuerza que produce ese movimiento, a esta posibilidad le llamaremos el problema directo. *b*) Si conocemos la ley de fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}, \alpha, \beta, ..., t)$ podemos encontrar la trayectoria resolviendo la ecuación diferencial, a éste le llamaremos el problema inverso.
Observando desde un SIR y usando el principio de relatividad galileano podemos ahora establecer que: los sistemas de referencia apropiados para la descripción mecánica son los sistemas inerciales, pues en ellos las ecuaciones de movimiento toman su forma más simple, es decir, en estos sistemas el espacio es isótropo y el tiempo homogéneo [19]
A la ecuación (2.8) se le llama de diversas formas: la segunda ley, la ecuación de movimiento de Newton o simplemente ecuación de movimiento. Este fue el exitoso método que en la práctica siguió Newton, cuyos resultados fueron tan importantes que establecieron las bases de la física moderna.

Queda por establecer un principio más:

Principio de superposición. El efecto sobre el movimiento, causado por varias fuerzas actuantes es igual al efecto de la suma de ellas, i.e.,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i, \tag{2.9}$$

donde $\mathbf{F}$ *es la fuerza total*[8].

[8]Éste también es un resultado obtenido de la observación directa.

La teoría newtoniana del movimiento está basada en estos cinco principios y con ellos es posible construir toda la teoría clásica del movimiento.

Debemos mencionar que el método de Newton no es el único posible, existen otros métodos. El Método de D'Alembert-Euler-Lagrange está basado en el principio del trabajo virtual; en él la descripción pasa de ser vectorial a escalar lo que resulta muy útil cuando las fuerzas son conservativas (o se pueden obtener de una función potencial) y las restricciones impuestas a las partículas pueden describirse analíticamente (restricciones holonómicas); más aún, algunos sistemas con restricciones no analíticas y fuerzas no derivables de una función potencial pueden tratarse con este método (ver capítulos 5 y 9). También están el método de Hamilton y el de Hamilton-Jacobi basados en el principio variacional; son útiles para sistemas con restricciones holonómicas y fuerzas derivables de un potencial (ver capítulo 9). Los métodos de Lagrange y de Hamilton están basados en principios equivalentes, si las restricciones son analíticas y las fuerzas derivables de una función potencial, el principio del trabajo virtual y el principio variacional son equivalentes, para mayores detalles vea la sección 9.2.

2.2. Ejemplos de leyes del movimiento

Para ilustrar el método del estudio dinámico de las partículas puntuales, estudiaremos en detalle tres ejemplo muy conocidos.

Caída libre de los cuerpos Un ejemplo simple, pero muy ilustrativo, de cómo trabaja este método, es el estudio de Galileo sobre la caída libre de los cuerpos. Galileo puso gran interés en el estudio de la caída libre de los cuerpos, entre otras razones, porque su experiencia no estaba de acuerdo con la física aristotélica. Debido a las limitaciones experimentales de su época

para medir con precisión intervalos de tiempo, Galileo trasladó el análisis experimental a los cuerpos que se deslizan sobre un plano inclinado muy bien pulido para evitar al máximo la fricción; la caída libre sería el caso en donde el plano inclinado se vuelve vertical, de esta forma Galileo logró hacer más lento el movimiento, y pudo hacer el análisis numérico. También estudió los objetos que abandonan el plano inclinado a la orilla de una mesa de altura h con velocidad en la dirección horizontal, que ahora llamamos tiro parabólico. Para Galileo era fundamental medir con la máxima precisión posible las cantidades que estaban involucradas en el fenómeno a estudiar; esta es tal vez la más grande enseñanza de Galileo, cuantificar las cantidades físicas para poder hacer un análisis. Esto que ahora nos parece algo muy simple, para su época fue revolucionario pues superó por mucho el análisis que hacían los antiguos griegos cuyo método consistía en observar la naturaleza y tratar de comprenderla mentalmente[9].

El resultado de las observaciones y mediciones de Galileo se puede resumir diciendo que: *todos los objetos en la superficie de la Tierra caen libremente con la misma aceleración, independientemente de su masa y forma.* Claramente, ésta es una de las idealizaciones que nos vemos obligados a hacer tratando de extraer la esencia del movimiento; es decir, entre otras cosas estamos omitiendo el efecto de la resistencia del aire o la fricción con el plano, suponiendo que el objeto puede ser descrito por el movimiento de un punto, etc. A esta idealización le llamamos *modelo físico.*

Las multiples observaciones de Galileo se pueden resumir formalmente como sigue: la altura a la que se encuentra un objeto en cada instante del tiempo t, cuando es soltado desde una altura h en $t = 0$, tiene la siguiente trayectoria:

$$\mathbf{r}\,(t) = (0, 0, h - ct^2)\ , \tag{2.10}$$

[9]La historia en torno a estas ideas revolucionarias puede consultarse en diversos textos, por ejemplo los texto del mismo Galileo, [47, 48] y otros [54, 51, 53].

donde h es la altura y c es una constante que caracteriza a la aceleración de la caída libre del objeto; ésta es la misma para cualquier cuerpo independientemente de su masa y forma. La coordenada z es la altura medida desde el piso (el origen del eje z) en cualquier instante del tiempo t; la ecuación (2.10) nos proporciona la trayectoria $\mathbf{r}(t)$. Esta ecuación nos permite calcular la fuerza que está actuando sobre la partícula que tiene esta trayectoria; aplicando la definción de fuerza a ésta obtenemos,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \frac{d^2}{dt^2} m\mathbf{a} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(0, 0, \left(h - ct^2\right)\right), \qquad (2.11)$$

igualmente

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z &= -2mc, \end{aligned} \qquad (2.12)$$

sólo hay fuerza en la dirección vertical y la podemos escribir como sigue:

$$F_z = -mg, \qquad (2.13)$$

siendo g la aceleración producida por la gravedad terrestre. De esta forma podemos escribir la ecuación para la trayectoria como

$$\mathbf{r} = \left(0, 0, h - \frac{1}{2}gt^2\right), \qquad (2.14)$$

ecuación bien conocida para los objetos que caen desde una altura h y sin velocidad inicial.

Debido a que esta expresión se cumple para cualquier objeto sobre la superficie de la Tierra, se puede establecer la *ley de fuerza* para la caída libre:

$$\mathbf{F} = -mg\,\widehat{k} \qquad (2.15)$$

donde $\widehat{k}$ es el vector unitario en la dirección vertical apuntando hacia arriba, *i.e.*, todos los objetos en la superficie terrestre son

atraídos con una fuerza igual a su peso, la masa por la aceleración de la gravedad. Todo esto es muy conocido, sin embargo nuestro interés es ilustrar el método con el que las leyes de fuerza son obtenidas directamente del experimento.

La ley de movimiento para la caída libre de los cuerpos (2.15) puede ser ahora aplicada al movimiento de proyectiles, la caída de un objeto en un campo gravitacional diferente al terrestre, la caída de un objeto en un medio resistivo, etc. Para esto usaremos a la segunda ley de Newton como una ecuación diferencial donde ya es conocida la ley de fuerza y debe entonces calcularse la trayectoria, ésto lo haremos en la siguiente sección.

Ley de Hooke. Oscilaciones armónicas

Ahora nos referiremos a la ley de Hooke para cuerpos elás-ticos. La forma moderna en que se realiza este experimento se muestra en la figura (2.2.). La fuerza, el peso que cuelga mg, se transmite a lo largo de la cuerda inextensible que no tiene masa (su masa es despreciable comparada con m), el resorte actuado por esta fuerza se alarga de L_0 a L siendo L_0 su longitud normal cuando no se aplica fuerza; el sistema completo se mantiene en equilibrio de tal forma que la fuerza que ejerce el resorte tiene la misma magnitud que el peso que cuelga. El modelo físico que aplicamos en este experimento es el siguiente: el resorte no tiene masa (su masa es despreciable con respecto a la masa a la que se sujeta), está rígidamente sujeto por un extremo a una pared (cuya masa es mucho mayor que la que produce la fuerza actuante mg), las cuerdas no son elongables y no tienen masa, la polea no causa fricción con la cuerda y su masa es igualmente despreciable.

Las mediciones de Hooke se pueden resumir en la figura (2.3.), donde $x = \Delta L = L - L_0$ es la elongación del resorte y $F = mg$ la fuerza que ejerce al elongarse la cantidad x. Estos experimentos muestran que: mientras la elongación sea pequeña ($\Delta L \ll L_0$), el resorte responde linealmente $F \sim \Delta L$, más allá de esta limitación el resorte entra al régimen plástico, después

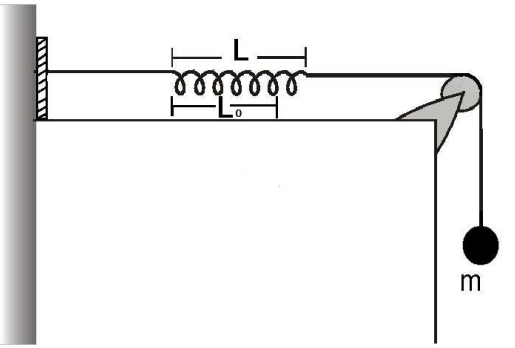

Figura 2.2. Un resorte helicoidal es estirado por la fuerza constante proporcionada por el peso mg, la longitud del resorte, cuando no se ejerce fuerza sobre él, es L_0.

a la deformación y finalmente a la falla; este comportamiento depende del material del que esté hecho el resorte, a su vez la pendiente de la curva depende del material y la forma helicoidal en que ha sido construido. Aplicando la definición de fuerza se puede establecer la llamada ley de Hooke para el régimen elástico ($\Delta L \ll L_0$)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}\,, \tag{2.16}$$

$k = \tan\theta$ se llama la constante elástica o constante de restitución lineal. Para todos los experimentos realizados en estas condiciones sobre resortes helicoidales hechos de diversos materiales y manteniendo elongaciones pequeñas, obtenemos siempre una fuerza de restitución lineal como la que expresa la última ecuación, para cada cuerpo elástico (resorte) la diferencia que lo caracteriza es la constante de restitución. La ecuación (2.16) se convierte en una ley de fuerza: cualquier resorte trabajando en su régimen elástico produce una fuerza de restitución lineal proporcional al desplazamiento desde la posición de equilibrio, la fuerza se opone a la deformación del resorte: si el resorte se comprime, la fuerza ejercida por éste tiende a descomprimirlo,

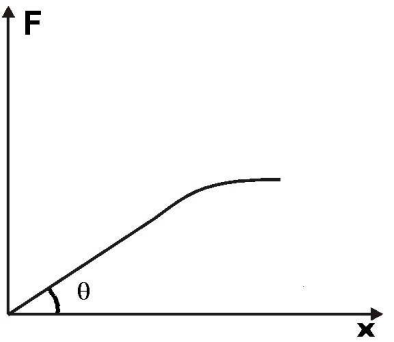

Figura 2.3. La fuerza que ejerce el resorte como función de la longitud que se estira.

si lo estiramos la fuerza de restitución tiende a llevarlo a su posición normal.

Ahora usaremos esta ley de fuerza y la segunda ley de Newton para predecir el movimiento que tendrá un objeto actuado por un resorte con constante de restitución k, tal como se muestra en la figura (2.4.). El modelo físico que hacemos para este sistema consiste en que el resorte actúa en su régimen elástico, el resorte tiene masa despreciable, entre el cuerpo y el plano no hay fricción, el objeto se puede considerar como una partícula puntual, es decir, basta con identificar el movimiento de un punto en el espacio para localizar al objeto. La existencia del plano es para restringir el movimiento a una dimensión, *i.e.*, para contrarrestar la acción de la gravedad.

Aplicando la segunda ley de Newton a la dimensión identificada por la coordenada x, obtenemos que la ley de fuerza actuante es la ley de Hooke,

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = m\ddot{x} = F(x) = -kx \ , \tag{2.17}$$

donde x es la elongación del resorte. Aquí, la ley de fuerza es conocida, esta es la ecuación diferencial para la trayectoria $x\,(t)$;

i.e., es la ecuación de movimiento. La ecuación (2.17) se puede arreglar como sigue

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.18}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ésta es la bien conocida ecuación armónica, cuya solución se puede calcular con su ecuación característica, escribiendo

$$x = Ae^{\beta t}$$

y sustituyendo en la ecuación de movimiento obtenemos que

$$\beta^2 + \frac{k}{m} = 0$$

cuya solución es

$$\beta = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \ ,$$

lo que permite escribir la solución general como

$$x\left(t\right) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \tag{2.19}$$

Conservando sólo la parte real, podemos arreglar esta ecuación de la siguiente forma,

$$x\left(t\right) = a\cos\omega_0 t + b\text{sen}\,\omega_0 t \tag{2.20}$$

o igualmente

$$x\left(t\right) = c\cos\left(\omega_0 t + \theta_0\right) \ . \tag{2.21}$$

Las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) son equivalentes y las constantes involucradas pueden ser calculadas al imponer a la solución las condiciones iniciales. Supongamos que las condiciones iniciales son tales que la partícula se encuentra en la posición x_0 y que se suelta desde ese punto sin velocidad inicial cuando empezamos a medir el tiempo $t = t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x\left(t = t_0\right) &= x_0 \\ \dot{x}\left(t = t_0\right) &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.22}$$

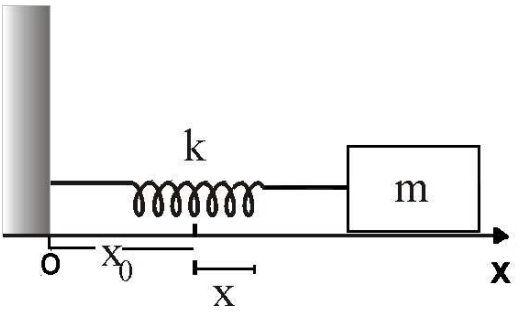

Figura 2.4. Un objeto de masa m se sujeta a un resorte helicoidal, la posición de equilibrio es el punto x_0.

lo que conduce a

$$x\left(t\right) = x_0 \cos \omega_0 t. \tag{2.23}$$

La constante ω_0 es la frecuencia angular de la oscilación; el movimiento es oscilatorio (armónico) y cada posición se repite después de un tiempo llamado periodo, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. A este tipo de movimiento se le llama armónico simple y a este sistema físico se le conoce como el oscilador armónico simple.

La solución (2.23) es la trayectoria, que fue obtenida al aplicar la ecuación de movimiento con la ley de fuerza (ley de Hooke), que a su vez se obtuvo del tercer principio (segunda ley de Newton).

Ley de atracción gravitacional

El problema del movimiento de los cuerpos celestes intrigó durante varios siglos a los filósofos naturales (posteriormente científicos); finalmente recibió una respuesta definitiva gracias al método desarrollado por Newton. Uno de los éxitos más grandes alcanzados por este método, es el caso de la ley de atracción gravitacional. En esta sección resumiremos muy brevemente los pasos que condujeron a Newton a establecer esta ley [49].

Newton tenía conocimiento pleno de las trayectorias planetarias, así como de datos precisos sobre el movimiento de

los satélites de Jupiter, descubiertos y estudiados por Galileo, además, conocía muy bien los datos de Borelli y Cassini sobre las órbitas de estos satélites[10]. También, eran muy conocidas las leyes empíricas establecidas por Kepler con base en datos astronómicos muy precisos de T. Brahe y otros astrónomos; es decir, conocía con precisión las trayectorias de los planetas. En el volumen II de los *Principia*, Newton describe toda esta información, y cómo, a partir de ella, desarrolló la ley de atracción gravitacional[11].

Con el conocimiento de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ para el movimiento de un planeta, la aplicación de la definición de fuerza produce directamente la función fuerza (ver la definición (2.4)): consideremos primero la trayectoria de un planeta del Sistema Solar (ver figura (2.5.)); de ella se puede calcular directamente el vector velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ y de éste el vector aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$. Encontramos que esta aceleración está dirigida a lo largo de la línea que une a las partículas y es atractiva, (*i.e.*, está dirigida hacia el foco donde se encuentra el Sol, que se considera fijo (en el capítulo 6 resolveremos con detalle este problema).

La magnitud de esta aceleración como función de la posición puede conocerse calculándola para varios puntos de la trayectoria (ver figura (2.6.)). Esta curva descrita por los puntos experimentales corresponde a la función $1/r^2$; con lo cual Newton concluyó que la fuerza es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. La dependencia de la fuerza con el contenido de masa la obtuvo Newton por un razonamiento muy intrincado [49], que aquí no repetiremos; en su lugar calcularemos la constante de proporcionalidad de las curvas de la figura (2.6.). Para

[10] Conviene aquí hacer la distinción entre órbita y trayectoria; por órbita nos referiremos al lugar geométrico que describe el movimiento de un objeto, es una función entre las coordenadas del objeto y no depende del tiempo, *i.e.*, un cuerpo celeste describe una curva plana que en el plano polar se pude identificar por $f(r, \theta) = 0$. La trayectoria es la posición del objeto como función del tiempo, *i.e.*, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

[11] En los *Principia*, Newton no utilizó el cálculo diferencia,l que él mismo había creado, utilizó argumentos geométricos, leyes de proporciones, etc.

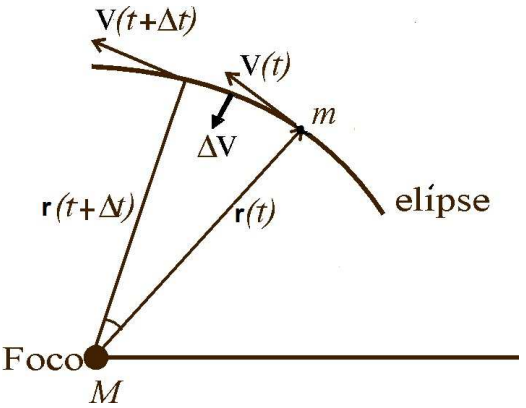

Figura 2.5. De acuerdo a la primera ley de Kepler, un planeta de masa m describe una elípse, en el foco de esta elipse está el Sol.

varios planetas orbitando al Sol y para el caso de los satélites de Jupiter, es posible estimar la constante de proporcionalidad por parejas de objetos celestes (Jupiter y uno de sus satélites o el Sol y alguno de sus planetas).

El resultado es que la fuerza de atracción es proporcional a la masa que contienen los cuerpos en interacción.

Esto resultó ser un comportamiento general observado para todos los cuerpos celestes de tal forma que correspondía a una ley universal, para comprobarla se puede aplicar al movimiento del par Tierra-Luna. Resumiendo estos hechos experimentales podemos escribir la ley universal de atracción gravitacional de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}\widehat{\mathbf{r}}\,. \tag{2.24}$$

G es una constante de proporcionalidad[12]; m_1 y m_2 en la ecuación (2.24) son las masas gravitacionales de los objetos en inter-

[12]El experimento que midió esta constante lo efectuó Cavendish un siglo después de que Newton enunciara su ley. La masa del Sol y los planetas no

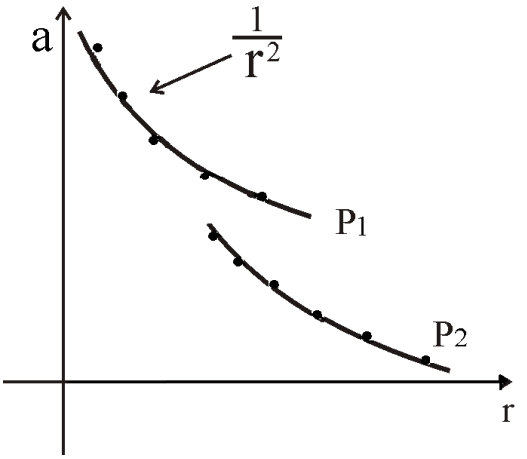

Figura 2.6. Diagrama que representa al módulo de la aceleración como función de la posición. La curva superior corresponde a un planeta muy masivo, mientras que la inferior a un planeta ligero, ambos orbitando en diferentes regiones del espacio.

acción[13], $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son las posiciones de los cuerpos (considerados puntuales) y $\widehat{\mathbf{r}}$ es el vector de magnitud unidad a lo largo de la línea que une a las partículas $\widehat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$; los índices 1 y 2 en $\mathbf{F}_{12}$ identifican la fuerza sobre la partícula 1 debida a la 2, que por la tercera ley de Newton es igual al negativo de la fuerza de la partícula 2 sobre la 1 ($\mathbf{F}_{21}$). Usando esta ley, en el capítulo 6 resolveremos detalladamente las ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento planetario.

Estos ejemplos simples y muy conocidos nos muestran la forma en que trabaja el método de Newton y en particular la forma

pudo conocerse antes de que se determinara la constante G cuyo valor es $G = 6{,}67259 \times 10^{-11} m^3/(kg\ s^2)$.

[13]Las masas en esta ley de movimiento son masas gravitacionales, no inerciales. Sin embargo, la constante de proporcionalidad G se escoge de tal forma que numéricamente la masa inercial es igual a la masa gravitacional. En el marco de la teoría de la relatividad general, el principio de equivalencia hace que la masa inercial y la masa gravitacional sean iguales [16].

en que se aplican los principios de la mecánica, especialmente la ley de fuerza.

2.3. Aplicaciones de las leyes de movimiento

A continuación ilustramos el uso de las leyes de la dinámica desarrolladas en la sección anterior, aplicándolas a sistemas sencillos. Todos estos ejemplos seleccionados pueden ser resueltos con métodos matemáticos simples, sin embargo, debemos hacer notar que muchos sistemas mecánicos no son solubles analíticamente; para esos sistemas es necesario desarrollar métodos numéricos o practicar soluciones aproximadas. En los casos presentados aquí, suponemos que se conoce la ley de fuerza y aplicamos la ecuación de movimiento de Newton para calcular la trayectoria resultante. En estos ejemplos escogimos a los sistemas más simples con el propósito de mostrar algunos de los múltiples métodos que suelen ser usados con este propósito. El método seleccionado está determinado por el tipo de fuerza, *i.e.*, si la fuerza depende de la posición, de la velocidad o del tiempo o de combinaciones de estas variables.

1. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
Supongamos que en un SIR la fuerza que actúa sobre una partícula es constante, en este caso la ecuación de movimiento en el correspondiente SIR es,

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t\right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = \mathbf{cte}\ , \tag{2.25}$$

para cada una de sus componentes tendremos que

$$F_i = m\frac{dv_i}{dt}, \qquad i = x, y, z; \tag{2.26}$$

una primera integración nos lleva a:

$$\int_{v_{i_0}}^{v_i(t)} v_i dt = \int_{t_0}^{t} a_i dt\ , \tag{2.27}$$

donde $a_i = F_i/m$, obteniendo que

$$v_i\,(t) - v_{i_0} = a_i\,(t - t_0)\ . \tag{2.28}$$

Análogamente, las componentes de la velocidad tienen la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i\,(t) = a_i\,(t - t_0) + v_{i_0}\ , \tag{2.29}$$

que también se integran fácilmente,

$$x_i\,(t) = x_{i_0} + v_{i_0}t + \frac{1}{2}a_i t^2, \tag{2.30}$$

equivalentemente

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\ t^2. \tag{2.31}$$

En esta ecuación hemos usado las condiciones iniciales, tales que en $t_0 = 0$ la posición y velocidad son respectivamente x_{i_0} y v_{i_0}; notemos que son seis las constantes que determinan las condiciones iniciales, las tres coordenadas iniciales y las tres componentes de la velocidad inicial. Esta es la muy conocida trayectoria de un movimiento uniformemente acelerado (fuerza constante). La solución a la ecuación (2.25) sólo requirió de integración directa y las correspondientes condiciones iniciales x_{i_0} y v_{i_0}; la trayectoria está determinada, para todo instante, por las ecuaciones paramétricas $x\,(t)\,,\ y\,(t)\,,\ z\,(t)$ o bien $\mathbf{r}\,(t)\,.$

2. Movimiento en un plano inclinado con fricción

Este es un ejemplo de movimiento restringido (restringido a moverse sobre una superficie). El bloque, sólo puede desplazarse a lo largo del plano; para que esto suceda, el plano debe ejercer una fuerza normal al plano ($\mathbf{N}$) que compensa la proyección del peso en la dirección normal al plano (esta es una fuerza de restricción). Si, además, el plano no es perfectamente liso también ejerce una fuerza de fricción constante de magnitud máxima $\mu\mathbf{N}$ que se opone a su desplazamiento, donde μ es el coeficiente de fricción estático (ver figura (2.7.)) el movimiento

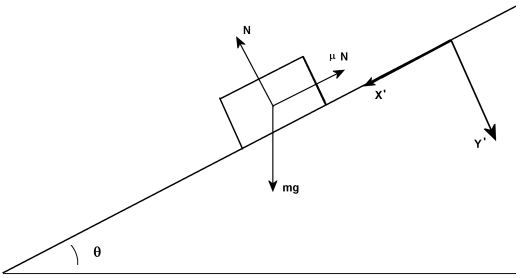

Figura 2.7. Un objeto resbala sobre un plano, entre el objeto y el plano actúa una fuerza de fricción $\mu\mathbf{N}$. La fuerza de reacción del plano es $\mathbf{N}$, ésta es una fuerza de restricción.

ocurre sólo si la proyección del peso es mayor que la fuerza de fricción máxima.

Tomando un sistema de ejes coordenados (x', y') tal como se muestra en la figura, podemos escribir la ecuación de movimiento de la siguiente forma:

$$F_{x'} = mg\, sen\,\theta - \mu N = m\frac{dv_{x'}}{dt}\ , \tag{2.32}$$

$$F_{y'} = mg\cos\theta - N = 0. \tag{2.33}$$

La segunda ecuación se debe a que el bloque no puede abandonar el plano, es decir, no hay movimiento en la dirección y'. Combinado las ecuaciones (2.32) y (2.33) obtenemos que

$$a_{x'} = \frac{dv_x}{dt} = g(sen\theta - \mu\cos\theta). \tag{2.34}$$

Esta es nuevamente una aceleración constante y el movimiento vuelve a ser uniformemente acelerado, se convierte en un problema equivalente al del ejemplo anterior, su solución se obtiene sustituyendo la aceleración (2.34) en la solución (2.30), obteniendo que la aceleración de este objeto resulta $a_{x'} < g$.

Un experimento de este tipo permitió a Galileo estudiar el movimiento de caída libre de los cuerpos; con este problema

equivalente logró hacer más lento el movimiento, esta aceleración efectiva es menor que g; en el experimento de Galileo el plano estaba muy bien pulido de tal manera que la fricción se despreció. La caída libre se obtiene con $\mu = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, la razón de esta ingeniosa sustitución fue que esa época no existían relojes suficientemente precisos para estudiar fácilmente la caída libre.

3. Fuerzas que dependen de la posición

Consideremos el caso en el que la fuerza sobre una partícula depende solamente de la posición, por simplicidad consideremos el movimiento en una dimensión, la ecuación de movimiento unidimensional se puede escribir así:

$$m\frac{d}{dt}v_x = F(x) \ , \tag{2.35}$$

que arreglamos como sigue,

$$m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = F(x) \ , \tag{2.36}$$

es decir,

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \tag{2.37}$$

lo que permite una integración directa

$$m\int_{v_0}^{v} v \ dv = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx \ . \tag{2.38}$$

Hemos escrito las condiciones iniciales de tal forma, que cuando $t = 0$; $x = x_0$ y $v = v_0$ y en el tiempo arbitrario t la posición es $x(t)$ mientras que la velocidad es $v(t)$. El término del lado izquierdo de la ecuación (2.38) es la energía cinética

$$T = m\int v \ dv = \frac{mv^2}{2} \ , \tag{2.39}$$

mientras que el término del lado derecho es el trabajo realizado por la fuerza $F(x)$ entre los puntos x_0 y x,

$$W_{x_0,x} = \int_{x_0}^{x} F(x) \ dx. \tag{2.40}$$

Siguiendo los resultados del capítulo anterior (ver ecuación 1.52) podemos asegurar que existe una función escalar $V(x)$, llamada la *función o energía potencial* tal que[14]

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}. \tag{2.41}$$

$$W_{x_0,x} = -(V(x) - V(x_0)) \tag{2.42}$$

La función $v(x)$ se llama función potencial o energía potencial. Cuando las fuerzas se pueden obtener como la derivada de una función escalar, decimos que las fuerzas son conservativas. De esta manera la ecuación (2.38) se puede escribir de las dos formas siguientes

$$W_{x_0,x} = \Delta T = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)\ , \tag{2.43}$$

$$T(x) + V(x) = T(x_0) + V(x_0) = cte = E, \tag{2.44}$$

donde x es un punto arbitrario sobre la trayectoria y x_0 es el punto inicial. Esto nos permite escribir un teorema general:

Si la fuerza total aplicada sobre una partícula es función solamente de la posición, la suma de la energía cinética y la energía potencial es una constante a lo largo de la trayectoria; es la energía mecánica total.

Se conoce con el nombre de teorema de conservación de la energía, mientras que la ecuación (2.43) se conoce con el nombre del teorema trabajo-energía, éste es válido aún cuando la fuerza sea función de otras variables como la velocidad y el tiempo.. La constante $V(x_0)$ es el origen del potencial, el cual es irrelevante debido a que la energía no se puede definir de forma absoluta, sólo son importantes y medibles los cambios de energía entre dos estados del sistema (ver ecuación 2.44).

[14]Para el caso general en tres dimensiones ver el capítulo 4.

De las ecuaciones (2.44) y (2.39) podemos obtener que,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V\left(x\right)\right)}\,, \tag{2.45}$$

que permite una integración directa para la variable t,

$$\pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V\left(x\right)\right)}} = \int_{t_0}^{t} dt\,. \tag{2.46}$$

El problema de fuerzas dependientes de la posición es soluble hasta una integral definida (se resuelve hasta una cuadratura[15]); esto se debe a que existe una primera integral o integral de movimiento para la ecuación diferencial (2.44): la energía mecánica[16].

Al igual que la conservación del momento lineal o el momento angular, la conservación de la energía nos permite disminuir el orden de la ecuación diferencial o eliminar un grado de libertad haciendo más fácil la solución del problema (este concepto lo estudiaremos más ampliamente en los capítulos 4 y 5).

Como ejemplo específico consideremos el caso de una partícula cayendo en el campo gravitacional de la Tierra con aceleración g constante; si no hay velocidad inicial en la componente horizontal, el movimiento es sólo en la dirección vertical. Escogiendo ésta como el eje coordenado y, tenemos que,

$$\mathbf{F} = -mg\widehat{j}, \tag{2.47}$$

el campo de fuerza es conservativo

[15]Cuando un sistema mecánico se puede resolver en términos de funciones elementales o por integrales de funciones elementales, se dice que es soluble por cuadraturas [14].

[16]Cuando esta primera integral o integral de movimiento no es función explícita del tiempo, se llama constante de movimiento (ver capítulo 4).

y la función potencial o energía potencial es:

$$V(y) = -\int_{y_0}^{y} F(y)\, dy,$$
$$V(y) = mg(y - y_0)\ . \tag{2.48}$$

El teorema de conservación de la energía implica que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = cte, \tag{2.49}$$

y por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy}, \tag{2.50}$$

donde hemos supuesto que en $t = 0$, $v = v_0$, y que $V(y_0) = 0$. La constante de energía vale $E = \frac{m}{2}v_0^2$ (ver ecuación 2.44). Esta última ecuación tiene por solución.

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = t, \tag{2.51}$$

o bien que

$$t = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2y}{g}}\ . \tag{2.52}$$

Del doble signo en la ecuación (2.50) seleccionamos aquel que corresponde a $y > 0$ para $t > 0$; fijando la condición inicial $y(t = 0) = 0$ obtenemos que

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\ . \tag{2.53}$$

Esta solución es la que esperábamos, la solución corresponde al movimiento de una partícula en un campo gravitacional constante o caída libre de los cuerpos. El caso donde el movimiento se efectúa en tres dimensiones es fácilmente extendible.

Análisis de una curva de potencial

Consideremos el caso donde el movimiento se efectúa en una sola dimensión , notemos que la expresión (2.46) prohíbe valores de x para los cuales el radicando es negativo, es decir, la energía total debe ser mayor que la energía potencial; de lo contrario, la energía cinética sería negativa y la velocidad imaginaria, lo cual no sería físicamente aceptable, esto significa que:

$$E - V\left(x\right) \geq 0\ . \tag{2.54}$$

$$v^2 = \frac{m}{2}(E - V(x)) \geq 0. \tag{2.55}$$

Para las fuerzas que sólo dependen de la posición, donde se puede calcular la función potencial, es posible analizar cualitativamente el movimiento sin necesidad de resolver totalmente el problema. Supongamos una partícula cuya fuerza dependiente de la posición tiene una función potencial como alguna de las ilustradas en la figura (2.8.).

Para el caso del potencial de la parte a): si la energía es E_1, para que la velocidad sea real, la partícula sólo puede moverse desde x_0 hasta el infinito. En el punto x_0 la partícula tiene velocidad cero debido a que en este punto la energía total y la energía potencial son iguales (ecuación 2.55); la diferencia entre el valor de E_1 y la curva de potencial es la energía cinética, esta diferencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, la máxima velocidad la alcanza cuando el potencial toma su valor mínimo, en este caso en el infinito en donde la velocidad es finita. Si la partícula tiene condiciones iniciales tales que su energía vale E_2, la partícula se puede mover entre x_1 y x_4 o bien entre x_4 y el infinito dependiendo de su posición inicial, en los puntos límites la velocidad es nuevamente nula, el punto x_4 es un punto de equilibrio inestable, debido a que si la partícula es colocada sin velocidad en este punto, cualquier pequeña perturbación la empujaría hacia la derecha o bien hacia la izquierda, en ambos casos alejándose del punto x_4. Un caso semejante es cuando la partícula tiene energía E_3, la diferencia aquí es que la partícula sólo puede estar en la región entre x_2 y x_3 o entre x_5 y el infinito

dependiendo de su posición inicial; no hay punto de equilibrio inestable, la región entre x_2 y x_3 acota el movimiento de la partícula y el movimiento es *ligado o acotado*, *i.e.* la partícula esta atrapada en esa región del espacio.

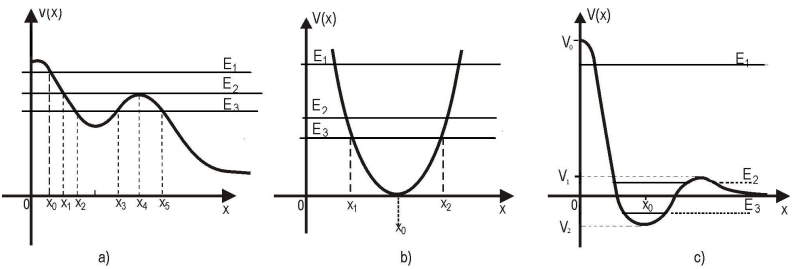

Figura 2.8. Diversas curvas de la función potencial en una dimensión y posibles valores de la constante de energía.

En la parte b) de esta figura, el potencial corresponde al de un resorte helicoidal con función potencial $V(x) = \frac{k}{2}x^2$. En este caso el movimiento es siempre acotado para todo valor de la energía, en los puntos extremos la velocidad de la partícula se vuelve nula, el punto x_0 es un punto de equilibrio estable. Si la partícula es colocada en este punto en reposo, ante cualquier pequeña perturbación, *i.e.*, un pequeño incremento de la energía separa a la partícula de este punto pero siempre regresa a ese punto.

La parte c) presenta un potencial que modela suficientemente bien la interacción entre dos partículas que forman una molécula; la figura muestra el caso donde un átomo en presencia de otro, con energía $E < 0$ sólo puede estar en una región acotada. La molécula puede tener a sus componentes ligadas (E_2, E_3) o desligadas (E_1); para el caso con energía E_2 la partícula puede estar acotada o libre dependiendo de que lado de la barrera de potencial sea colocada por las condiciones iniciales Mucha información útil puede ser obtenida del simple análisis de la curva de potencial.

4. Proyectiles en un medio resistivo

Consideremos que una partícula puntual de masa m se convierte en un proyectil, se lanza desde el origen de coordenadas de un SIR con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ haciendo un ángulo θ con la horizontal, tal como se ilustra en la figura (2.9.), la rapidez v_0 correspondería a la salida de un proyectil de la boca de un cañón.

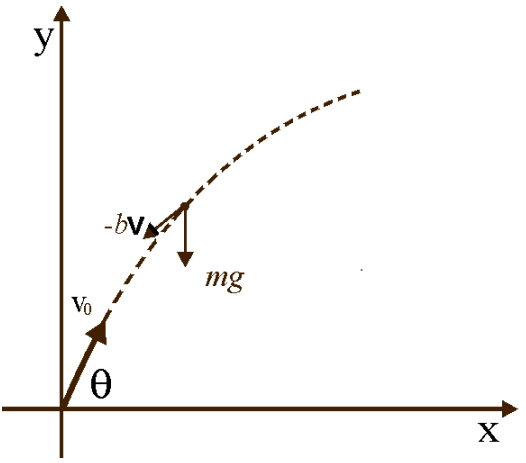

Figura 2.9. Proyectil moviéndose en un medio resistivo.

En este caso las leyes de fuerza son conocidas: la fuerza de gravedad $m\mathbf{g}$ considerada constante[17] y la fuerza viscosa $-b\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ es la velocidad relativa entre el objeto y el medio resistivo, si el medio resistivo está en reposo, se trata de la velocidad de la partícula medida desde el sistema de referencia. Ésta última es la ley de Stokes para la viscosidad de un objeto que se desplaza en un fluido; el coeficiente b depende del tipo de fluido, de su viscosidad y de la geometría del objeto que se desplaza; el signo negativo indica que la fuerza está en el sentido opuesto al movimiento (tiende a detener el movimiento, es resistiva). El

[17]Si las variaciones en la altura del proyectil no son muy grandes, la fuerza de atracción gravitacional sobre la superficie de la Tierra es aproximadamente constante.

movimiento se realiza en el plano definido por los vectores $\mathbf{v}_0$ y $m\mathbf{g}$ debido a que no hay fuerza ni velocidad inicial actuando fuera de este plano. Aplicando el principio de superposición y la segunda ley de Newton, escribimos las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -b\dot{y} - mg, \end{aligned} \tag{2.56}$$

estas ecuaciones están separadas y son de fácil integración, la primera de ellas se convierte en

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -b\frac{dx}{dt} \tag{2.57}$$

que se integra fácilmente en:

$$m\dot{x} = -bx + c_1, \tag{2.58}$$

a su vez, es fácilmente integrable:

$$\frac{dx}{x - c_1^{'}} = -\frac{b}{m}dt, \tag{2.59}$$

cuya solución es[18]:

$$\ln(x - c_1^{'}) = -\frac{b}{m}t + c_2. \tag{2.60}$$

Si imponemos como condiciones iniciales que en $t = 0$, $x = x_0$ y $\dot{x} = v_{0x}$ obtenemos la solución para la coordenada x,

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{b}v_{0x}(1 - e^{-\frac{b}{m}t}). \tag{2.61}$$

[18]El argumento en el logaritmo no debería tener dimensiones, sin embargo, en el momento de despejar a la variable x o t las dimensiones aparecen correctamente.

La segunda de las ecuaciones (2.56) puede ser resuelta de forma análoga si escribimos que $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, resultando que

$$t = \int_{v_{0y}}^{v} \frac{m \ d\dot{y}}{-mg - b\dot{y}}, \tag{2.62}$$

que se integra en:

$$t = -\frac{m}{b} \ln(\frac{mg + b\dot{y}}{mg + bv_{0y}}). \tag{2.63}$$

Esta última ecuación se arregla como sigue,

$$\dot{y} \ = v_y = -\frac{mg}{b} + (\frac{mg}{b} + v_{0y})e^{-\frac{bt}{m}}, \tag{2.64}$$

a su vez se integra fácilmente,

$$y = -\frac{mg}{b}t + \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{mv_{0y}}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right). \tag{2.65}$$

En esta solución ya incluimos las condiciones iniciales, $y(t = 0) = 0$ y $\dot{y}(t = 0) = v_{0y}$. Para analizar el movimiento del proyectil es conveniente graficar la trayectoria (ver figura (2.10.).

Si hacemos que $t \to \infty$, la solución tienen los siguientes límites,

$$\begin{aligned} x(t \to \infty) &= \frac{m}{b} v_{0x} + x_0 \\ y(t \to \infty) &\to -\infty, \end{aligned} \tag{2.66}$$

lo que podemos apreciar en la figura. El hecho de que haya una disipación de energía, debida a la resistencia del medio, acorta el alcance del proyectil: $x_{\text{máx}} = \frac{m}{b} v_{0x} + x_0$ que es proporcional al momento lineal inicial e inversamente proporcional al coeficiente de la fuerza resistiva; si el medio presenta gran viscosidad, el alcance es muy pequeño. A su vez la altura máxima que alcanza

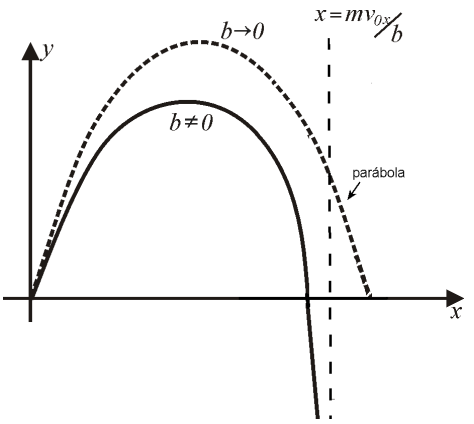

Figura 2.10. Órbitas $y = y(x)$ de proyectiles en el campo gravitacional terrestre. El valor del parámetro $b = 0$ corresponde al tiro parabólico sin fricción, mientras que $b \neq 0$ es el caso del movimiento de un proyectil en un medio resistivo.

también se acorta. El caso de un tiro parabólico sin fricción se obtiene poniendo $b = 0$ en las ecuaciones de movimiento, éstas resultan fácilmente integrables (ver ejercicio al final del capítulo).

2.4. Movimientos oscilatorios

2.4.1. Osciladores

Oscilaciones armónicas simples

Cuando una curva de potencial tiene un mínimo x_o, semejante al de la parte c) de la figura (2.8.) y la energía total E_3 no es muy diferente de la energía potencial en el mínimo, siempre es posible aproximar con un desarrollo en serie de Taylor alrededor de este punto, resultando que

$$V(x) = V(x_o) + \left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x_o}(x - x_o) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_{x_o}(x - x_o)^2 + \cdots \qquad (2.67)$$

Cambiando la variable a $\xi = x - x_o$, corriendo el origen del potencial a $V(x_o) = 0$, teniendo en cuenta que la primera derivada es nula en el mínimo, y que la segunda derivada es positiva en este punto, obtenemos que el potencial cerca del mínimo se puede aproximar por:

$$V(\xi) = \frac{1}{2}k\xi^2, \qquad (2.68)$$

que corresponde a una fuerza de restitución lineal. Esta aproximación, cuando conservamos términos hasta el segundo orden, se llama armónica simple porque su solución resulta ser una función trigonométrica con una sola frecuencia, *i.e.*, con un solo armónico. Para todos los sistemas mecánicos con un solo grado de libertad, muy cerca del equilibrio estable, el movimiento tiene por primera aproximación el de un movimiento armónico simple cuya solución está dada por la ecuación (2.21). Cuando es necesario incluir términos de orden superior en el desarrollo de la ecuación (2.67) el problema ya no es soluble analíticamente y la oscilación se vuelve anarmónica, la ecuación diferencial correspondiente se vuelve no lineal.

Cuando tenemos sistemas mecánicos con una fuerza de restitución lineal como la de la ecuación (2.17), el movimiento está descrito por la ecuación armónica (2.18) y tiene solución oscilatoria del tipo de la ecuación (2.21). Este tipo de movimiento se llama armónico simple y se encuentra con mucha frecuencia en la naturaleza.

El oscilador armónico amortiguado

Consideremos ahora el efecto disipativo del medio donde se mueve un oscilador en una dimensión. Supongamos una fuerza de

restitución lineal actuando en la dirección x, con coeficiente de restitución lineal k, a la cual se le añade una fuerza resistiva proporcional a la velocidad del cuerpo; esta fuerza se presenta cuando el medio es un fluido como el agua o el aire. La fuerza resistiva depende de la viscosidad del fluido y de la forma del objeto y se puede escribir como $f_f = -b\dot{x}$, es decir, la conocida ley de Stokes

Aplicando la segunda ley de Newton y el principio de superposición, escribimos que

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx, \tag{2.69}$$

este es un ejemplo típico de una ley de fuerza que depende de la posición, la velocidad y los parámetros del sistema,

$$m\ddot{x} = F(x.\dot{x}, m, b, k) \tag{2.70}$$

La ecuación de movimiento se puede escribir así:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ . \tag{2.71}$$

Una forma de resolver esta ecuación es encontrando su ecuación característica de la siguiente forma: proponiendo la solución como

$$x = Ae^{\alpha t}\ , \tag{2.72}$$

y sustituyendo en la ecuación (2.71) obtenemos para α,

$$m\alpha^2 + b\alpha + k = 0\ , \tag{2.73}$$

que tiene las siguientes soluciones,

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}\ . \tag{2.74}$$

Dependiendo de los valores de los parámetros que intervienen, podemos obtener tres casos posibles:

$$\begin{aligned} b^2 - 4km > 0 &\quad \text{sobre amortiguado} \\ b^2 = 4km &\quad \text{crítico} \\ b^2 - 4km < 0 &\quad \text{amortiguado} \end{aligned}$$

En el primer caso, las raíces de la ecuación (2.73) α_1 y α_2, son reales y negativas, de tal modo que la solución tiene la forma,

$$x\left(t\right) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}; \tag{2.75}$$

el movimiento no es oscilatorio, la amplitud inicial x decae a cero tan rápidamente como grandes sean α_1 y $_2$, es decir, dependiendo de que tan grande sea la resistencia del medio comparado con k/m . Un ejemplo de este tipo de sistemas son los amortiguadores automáticos que cierran las puertas sin golpear y sin que oscilen. Las constantes A_1 y A_2 se determinan por las condiciones iniciales.

En el caso crítico, las raíces están degeneradas, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha < 0$, aquí se tiene un caso especial de oscilaciones sobre amortiguadas y la solución general toma la forma:

$$x\left(t\right) = A_1 e^{\alpha t}\left(1 + A_2 t\right). \tag{2.76}$$

El tercer caso resulta el más interesante físicamente. Hay dos valores complejos de α ($\alpha_1 = \alpha_2^*$),

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}\ , \tag{2.77}$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular del oscilador simple (no amortiguado); en este caso la solución se puede escribir como sigue,

$$x = a_1\, e^{-\beta t}\, e^{i\omega_1 t} + a_2\, e^{-\beta t}\, e^{-i\omega_1 t}, \tag{2.78}$$

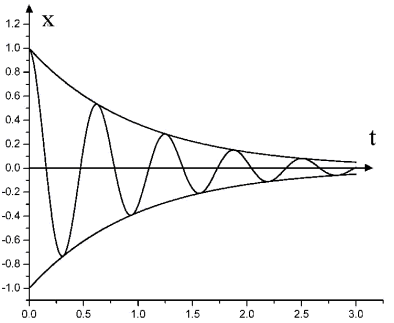

Figura 2.11. Ejemplo de una oscilación armónica amortiguada, para dos valores arbitrarios de la amplitud y la frecuencia angular. La envolvente de la curva es la función exponencial.

donde $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$. La solución se puede arreglar de la siguiente forma,

$$x\left(t\right) = Ae^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t + \theta_0\right) \ , \tag{2.79}$$

A y θ dependen de las condiciones iniciales. El movimiento es oscilatorio con frecuencia $\omega_1 < \omega_0$, pero su amplitud decae con el tiempo de forma exponencial, véase la figura (2.11.); la atenuación está determinada por la exponencial decreciente, las oscilaciones terminan y se disipa toda la energía inicial, este es claramente un sistema no conservativo.

Oscilaciones forzadas.
A un oscilador armónico en una dimensión que está amortiguado por una fuerza resistiva lineal en la velocidad le añadiremos ahora una fuerza externa también armónica de la forma

$$F_x = F_0\cos\left(\omega t\right) \ , \tag{2.80}$$

donde ω es la frecuencia de la fuerza externa.

La ecuación de movimiento queda ahora de la siguiente forma,

$$m\ddot{x} = -k\ x - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \tag{2.81}$$

$$m\ddot{x} = F(\ x, \dot{x}, t, \alpha, \beta, ...) \tag{2.82}$$

y la escribimos como sigue,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F' \cos \omega t\ , \tag{2.83}$$

donde $F' = F_0/m$ y $2\beta = \frac{b}{m}$. Este es un buen ejemplo de una ley de fuerza que depende de posición, velocidad, tiempo y parámetros de sistema. Para resolver esta ecuación de movimiento necesitamos la solución de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa. La solución de la ecuación homogénea ya fue obtenida en la sección anterior, esa solución corresponde a una atenuación, decae exponencialmente con el tiempo, la llamaremos la solución transitoria. La solución de la ecuación homogénea ya contiene las condiciones iniciales que determinan las constantes A y θ_0 de la ecuación (2.79). La solución particular no puede contener constantes indeterminadas. Por inspección podemos darnos cuenta que la solución de la ecuación completa es armónica debido a que después de un cierto tiempo el transitorio ha pasado y sólo quedará la parte forzante, que podría tener amplitud diferente y estar fuera de fase con respecto a la fuerza externa, es decir, proponemos como solución particular,

$$x_2\,(t) = c \cos\,(\omega t + \phi)\ , \tag{2.84}$$

en donde la amplitud c y la fase ϕ deben ser determinadas, deben depender sólo de los parámetros del sistema. Sustituyendo esta propuesta en la ecuación (2.83), tendremos que

$$\begin{aligned} -c\omega^2 \cos\,(\omega t + \phi) - 2\beta c\omega\, sen\,(\omega t + \phi) + c\omega_0^2 \cos\,(\omega t + \phi) \quad &= \\ = F' \cos \omega t, \end{aligned} \tag{2.85}$$

y arreglando términos llegamos a la siguiente forma,

$$-c\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos(\omega t+\phi)-2\beta\omega\, c\, sen\ (\omega t+\phi)-F'\cos\omega t=0, \tag{2.86}$$

podemos arreglar esta ecuación en términos de las funciones $\operatorname{sen}\omega t$ y $\cos\omega t$ tendremos que:

$$\cos\omega t\left[-c\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos\phi-2\beta\omega c\ sen\,\phi-F'\right]+$$

$$sen\ \omega t\left[c(\omega^2-\omega_0^2)\ sen\ \phi-2\beta\omega c\cos\phi\right]=0 \tag{2.87}$$

los coeficientes de las funciones sen y cos deben ser nulos pues ellas son independientes y estas dos últimas expresiones deben ser válidas para todo tiempo; con estas dos condiciones podemos despejar fácilmente a los parámetros deseados c y ϕ, obteniendo finalmente que:

$$c=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\,, \tag{2.88}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\quad. \tag{2.89}$$

Con este resultado, la solución completa se puede escribir como sigue:

$$x=ae^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t+\theta\right)\quad+\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\phi\right).$$

$$(transitorio)\qquad\qquad(resonante) \tag{2.90}$$

En esta expresión, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del oscilador, $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{4m}}$ es la frecuencia angular de la oscilación

amortiguada (ecuación (2.79)), y ω es la frecuencia externa forzante. El primer término, llamado transitorio, es la solución para el oscilador amortiguado, la constante de decaimiento en β, tiene amplitud a y fase θ que dependen de las condiciones iniciales; después de un tiempo finito este término se vuelve despreciable. El segundo término en la ecuación (2.90) es el término resonante, éste permanece a lo largo del tiempo y puede alcanzar una gran amplitud, *i.e.*, resuena. Notemos que la amplitud y fase de este término no dependen de las condiciones iniciales, dependen sólo de los parámetros del sistema. Para encontrar la frecuencia que produce la máxima amplitud c, derivamos la amplitud con respecto a ω, obteniendo,

$$\frac{dc}{d\omega} = \frac{-\frac{F_0}{m} 2\omega \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right) - 2\beta^2 \right)}{\left(\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right)^3} = 0, \tag{2.91}$$

y la frecuencia resonante, aquella que hace a la amplitud máxima, resulta ser:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{2.92}$$

Si el coeficiente de amortiguación es pequeño comparado con ω_0, la frecuencia resonante es muy cercana a ω_0, pero siempre es menor que ella. La amplitud en el máximo toma el valor

$$c_{\text{máx}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{2.93}$$

Mientras más pequeño sea el coeficiente de decaimiento, la amplitud máxima es más grande. El ancho de la resonancia es proporcional al valor de β. En la figura (2.12.) ilustramos este comportamiento.

Observemos que $\omega_{res} < \omega_1 < \omega_0$, donde ω_1 es la frecuencia de la oscilación amortiguada, mientras que ω_0 es la frecuencia natural del oscilador (ver figura (2.13.)). Mientras más débil sea el amortiguamiento $\beta \to 0$, más cerca estarán ω_{res} y ω_0;

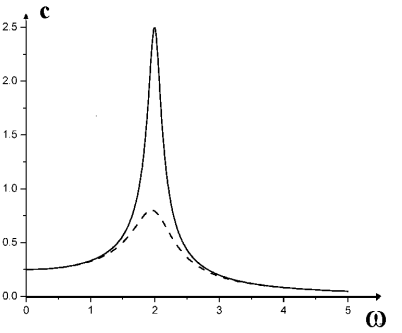

Figura 2.12. Amplitud como función de la frecuencia forzante medida en Hertz. En esta gráfica escogimos la frecuencia $\omega_0 = 2\ s^{-1}$, la curva más pronunciada corresponde a $\beta^2 = 0.01s^{-1} = \frac{1}{200}\omega_0$, mientras que la segunda curva corresponde a un valor mayor, $\beta^2 = 0.1s^{-1} = \frac{1}{20}\omega_0$.

simultáneamente, la fase ϕ dada por la ecuación (2.89) se vuelve $\pi/2$; es decir, para oscilaciones muy débilmente amortiguadas, la oscilación resonante y la oscilación forzada están fuera de fase por un cuarto de ciclo.

La energía en este sistema no se conserva porque hay un término disipativo y porque está entrando energía por medio de la fuerza forzante. La energía almacenada en el oscilador es debida a los términos transitorio y resonante:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_t + \dot{x}_r)^2 + \frac{k}{2}(x_t + x_r)^2,$$
$$E = \frac{m}{2}\dot{x}_t^{\,2} + \frac{k}{2}\dot{x}_t^{\,2} + \frac{m}{2}\dot{x}_r^{\,2} + \frac{k}{2}x_r^2 + m\dot{x}_t\dot{x}_r + kx_tx_r \qquad (2.94)$$

que se puede escribir como sigue:

$$E = E_t + E_r + E_{transf} \qquad (2.95)$$

donde la energías de los téminos transitorio y resonante son como sigue:

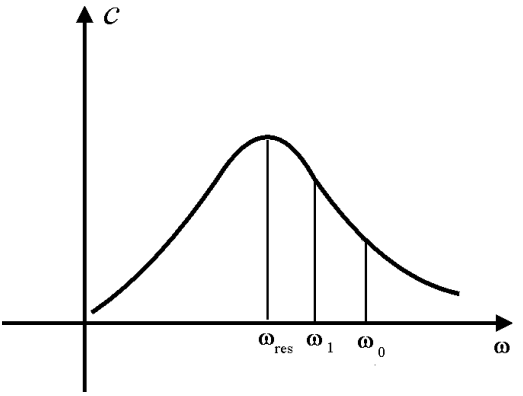

Figura 2.13. La amplitud de la oscilación forzada es máxima en ω_{res}, ω_1 es la frecuencia de la oscilación amortiguada y ω_0 es la frecuencia natural del oscilador.

$$E_r = \frac{m\dot{x}_r^2}{2} + \frac{k}{2}x_r^2 \tag{2.96}$$

$$E_t = \frac{m\dot{x}_t^2}{2} + \frac{k}{2}x_t^2. \tag{2.97}$$

La transferencia de energía entre la oscilación transitoria y la resonante la definimos así:

$$E_{transferida} = m\dot{x}_t\dot{x}_r + kx_tx_r \ . \tag{2.98}$$

El transitorio decae rápidamente a cero y la energía del oscilador

está almacenada en la oscilación forzada,

$$E_r = \frac{m}{2}\left(\frac{-\omega F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}sen\left(\omega t+\phi\right)\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\phi\right)\right)^2 . \tag{2.99}$$

En la frecuencia resonante esta energía crece mucho, de este hecho proviene el nombre de resonante pues la energía proviene de la fuerza externa forzante, sólo cuando β se anula esta energía es infinita. En la práctica esta condición no es alcanzable debido a dos hechos: a) la resistencia del medio siempre existe aunque sea muy pequeña, b) si la amplitud de la oscilación crece mucho, la velocidad también crece y el resorte sale rápidamente de su régimen elástico y el sistema se destruye rápidamente. Además, el término disipativo toma otra forma, ya no se comporta de manera lineal, en esta condición la ecuación de movimiento (2.81) y su solución (2.90) ya no son válidas.

Pulsos resonantes

Hay muchos ejemplos donde un sistema puede resonar; para aquellos sistemas que se encuentran en un mínimo de energía potencial (en un punto de equilibrio estable) pequeñas perturbaciones lo ponen en oscilación armónica simple, *i.e.*, cuando hay una fuerza de restitución lineal. También es muy frecuente que aparezca un término disipativo proporcional a la velocidad del cuerpo, debido a la fricción con el medio donde se mueve el objeto. Hasta aquí, el sistema simplemente oscilaría de forma amortiguada por la fricción para finalmente retornar a su posición de equilibrio. Sin embargo, también es posible que aparezca un agente externo forzando al movimiento, el término forzante no necesita ser armónico para desencadenar una resonancia. El caso de puentes que se derrumban como el famoso puente de

Tacoma en el estado de Washington, en los Estados Unidos de Norte América, y el caso de algunos edificios que se derrumban al ocurrir un sismo como el de la ciudad de México en 1985, son ejemplos de daños causados por pulsos o trenes de ondas, a continuación analizaremos estas condiciones.

Supongamos un sistema con la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t), \tag{2.100}$$

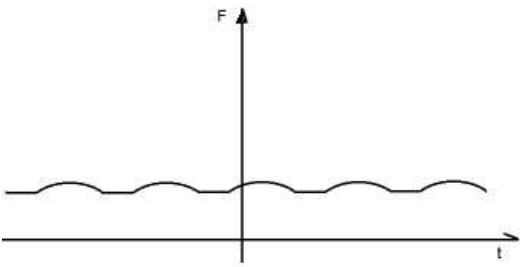

Figura 2.14. Un tren de ondas de periodo T puede convertirse en un agente forzante de las oscilaciones. Nótese que la intensidad no es necesariamente muy grande.

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es su frecuencia natural de oscilación, β es el coeficiente de amortiguamiento y $F(t)$ es el agente externo forzante (ver figura (2.14.)). Supongamos por simplicidad que el tren de ondas es periódico con periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, de tal forma que lo podemos expresar como la serie de Fourier[19],

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos(l\Omega_0 t) + b_l sen\ (l\Omega_0 t)). \tag{2.101}$$

[19]El caso de un pulso o un término no periódico requiere de una integral de Fourier en lugar de una serie, el tratamiento del problema es equivalente pero con complicaciones algebraicas.

La expresión anterior es válida para toda función periódica, y los coeficientes en el desarrollo pueden ser calculados gracias a la ortonormalidad de las funciones trigonométricas que resumimos en la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{ll}
\int_a^b \Phi_n(t)\Phi_m(t)dt = \delta_{nm} & \Phi_n \text{ y } \Phi_m \text{ son ortonormales en el intervalo } (a,b) \\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\Omega_0 t)dt = 0 & \text{con } \Omega_0 T = 2\pi \text{ para todo valor de } n, \\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\Omega_0 t)dt = 0 & \text{para todo valor de } n \\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\Omega_0 t)\cos(m\Omega_0 t)dt = \delta_{nm} & \\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\Omega_0 t)sen(m\Omega_0 t)dt = \delta_{nm} & \\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\Omega_0)sen(m\Omega_0 t)dt = 0 & n, m = 0, 1, 2, \ldots
\end{array}
\tag{2.102}
$$

Con estas propiedades, los coeficientes del pulso periódico se pueden calcular, multiplicando a la ecuación (2.101) por el $\text{sen}(k\Omega_0 t)$ o por el $\cos(k\Omega_0 t)$, e integrando sobre un ciclo obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)dt, \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos(k\Omega_0 t)dt, \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)sen(k\Omega_0 t)dt.
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

Con el propósito de evitar un desarrollo algebraico largo, supongamos que el pulso periódico que nos interesa sólo tiene la componente simétrica (ver ejercicio al final del capítulo). Con esta suposición podemos escribir al pulso como sigue:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(l\Omega_0 t); \tag{2.104}$$

la ecuación de movimiento (2.100) queda así:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos(l\Omega_0 t)). \tag{2.105}$$

El término constante en el lado derecho lo podemos asimilar en la solución de la ecuación homogénea; el único cambio que produce es modificar la amplitud de la oscilación amortiguada. La solución particular de la ecuación completa la podemos proponer siguiendo el resultado de la sección anterior:

$$x_{res}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cos\left(l\Omega_0 t + \phi_l\right), \tag{2.106}$$

en donde todas las constantes c_l y ϕ_l deben ser determinadas. Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación de movimiento y arreglando términos, la condición (2.87) se convierte ahora en

$$\sum_{l=1}^{\infty} \cos l\Omega_0 t \left[-c_l\left(l^2\Omega_0^2 - \omega_0^2\right)\cos\phi_l - 2\beta c_l l\Omega_0\, sen\,\phi_l - a_l\right] +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} sen\ l\Omega_0 t \left[-c_l\left(\left(l\Omega_0\right)^2 - \omega_0^2\right) sen\ \phi_l - 2\beta l\Omega_0 c_l \cos\phi_l\right] = 0. \tag{2.107}$$

Usando las propiedades de ortonormalidad de las funciones trigonométricas de las ecuaciones (2.102), podemos probar que

cada término en la suma anterior debe ser nulo, con lo que obtenemos la solución para c_k y ϕ_k;

$$c_k = \frac{a_k/m}{\sqrt{\left((k\Omega_0)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2(k\Omega_0)^2}}\,, \tag{2.108}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\frac{2\beta(k\Omega_0)}{(k\Omega_0)^2 - \omega_0^2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.109}$$

La solución para este pulso periódico y simétrico es entonces,

$$\begin{aligned} x = {} & a' e^{-\beta t}\cos\left(\omega_1 t + \theta\right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/m}{\sqrt{\left((k\Omega_0)^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2(k\Omega_0)^2}} \cos\left(k\Omega_0 t + \phi_k\right). \end{aligned} \tag{2.110}$$

El término transitorio decae exponencialmente con la constante de amortiguamiento β mientras que los términos restantes pueden presentar resonancia.

Si alguno de los armónicos en la serie de Fourier tiene la siguiente propiedad

$$k\Omega_0 = \omega_{res} \approx \sqrt{\left(\omega_0\right)^2 - 2\beta^2}, \tag{2.111}$$

el sistema entrará en resonancia con una amplitud que depende del valor de a_k. Supongamos que el término importante en la ecuación (2.110) es el k-ésimo que corresponde a la frecuencia de resonancia, este término tendrá una amplitud dada por la ecuación (2.93)

$$c_{\text{máx}} = \frac{a_k/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{a_k}{b\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}, \tag{2.112}$$

esta amplitud es muy sensible al valor a_k/b. Si el coeficiente de disipación es muy pequeño, la amplitud de la resonancia es muy grande, el sistema puede destruirse; por ejemplo, en el caso de un resorte caería rápidamente en el régimen no elástico y

posiblemente llegaría hasta la ruptura; en el caso de un circuito eléctrico, quemarse por una gran corriente, etc.

En ocasiones una resonancia es deseable pero en otras no lo es, en particular algunas estructuras construidas por los humanos, como edificios y puentes, deben alejarse todo lo posible de la condición resonante.

Ahora podemos explicar porque se derrumbó el puente de Tacoma; primero debemos considerar al puente como una estructura elástica que puede oscilar de diversas formas, de acuerdo con sus n modos normales de vibración (ver capítulo 8); esto significa que en lugar de un solo término con ω_0 en las ecuaciones (2.100), hay varios términos de oscilación natural $\omega_{\nu 0}$ $\nu = 1, 2, 3, ..., n$ y cualquiera de ellos puede entrar en resonancia. Si analizamos la ecuación (2.108), podemos observar que puede existir una frecuencia en el agente forzante externo, (en este caso el viento) $\omega_k = k\Omega_0$, que esté muy cerca de alguna frecuencia normal $\omega_{\nu 0}$. De todos los modos de vibración naturales de la estructura, alguno de ellos podría entrar en resonancia y todos los demás modos naturales se amortiguarían rápidamente, pero este modo adquiere una amplitud importante. Este modo en particular sería excitado y adquiriría una gran amplitud de tal modo que si las condiciones de construcción son críticas o equivocadas el sistema podría destruirse.

El puente de Tacoma era muy angosto con un modo normal de vibración de frecuencia muy baja, de sólo algunos Hertz, esto favoreció la resonancia ante un viento intenso en forma de ráfagas.

De forma análoga, un edificio con un modo normal de baja frecuencia puede ser excitado por una onda sísmica, cuyas frecuencias estén en el rango de unos cuantos Hertz. Es posible, entonces, que se alcancen las condiciones de resonancia y el edificio termine por destruirse, por un mal diseño, a pesar de cumplir con las normas de construcción.

Circuito resonante

Un sistema eléctrico que tiene la misma ecuación de movimiento

que el oscilador armónico forzado, es el circuito eléctrico resonante, compuesto de un elemento con inercia electromagnética (bobina de inducción L), uno disipativo (la resistencia R) y otro restitutivo (el capacitor C). Estos son alimentados por una fuente de fuerza electromotriz ε_0; tal como se muestra en la figura (2.15.).

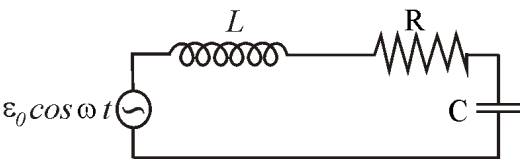

Figura 2.15. Circuito resonante. La resistencia es el elemento disipativo, la capacitancia es la restitución lineal y la bobina de inducción es el elemento inercial.

Aplicando una de las reglas de Kirchhoff para este circuito obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t = L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C}. \tag{2.113}$$

i es la corriente en el circuito y q es la carga, ($i = \frac{dq}{dt}$), en esta ecuación pueden ser identificados cada uno de los términos en analogía con los del oscilador de la sección precedente;

$$\begin{aligned} x &\to q \quad && variable\ independiente \\ L &\to m \quad && inercia \\ R &\to b \quad && resistencia \\ \frac{1}{C} &\to k \quad && restitución \\ \varepsilon_0 &\to F_0 \quad && amplitud\ forzante \end{aligned}$$

Traducido el problema de esta forma, la ecuación de movimiento para la variación temporal de la carga se escribe como sigue:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t. \tag{2.114}$$

En ella identificamos inmediatamente el coeficiente de decaimiento β, la frecuencia natural de oscilación ω_0, la frecuencia de la oscilación atenuada ω_1 y la frecuencia a la que el sistema resuena,

$$\beta = \frac{R}{2L} \tag{2.115}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2.116}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{2.117}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{2.118}$$

y la solución resonante para la variable de interés es simplemente:

$$q(t) = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \phi\right), \tag{2.119}$$

$$\tan\phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2.120}$$

El resto del análisis es idéntico y este circuito presenta las mismas propiedades físicas que el resonador mecánico amortiguado y forzado. Un ejemplo clásico de este resonador es el del circuito selector de ondas electromagnéticas usado en los antiguas radiorreceptores, en donde un condensador variable ajustaba a la frecuencia resonante que se deseaba seleccionar, mientras que el resto de frecuencias eran rápidamente atenuadas y no alcanzaban una gran amplitud.

Resonador acústico. Resonador de Helmholtz
Un sistema acústico que también tiene esta ecuación de movimiento es el resonador de Helmholtz. Consideremos una caja acústica con una pequeña apertura tal como se muestra en la figura (2.16.), la inercia acústica se define en analogía con la inercia mecánica, como la capacidad del objeto para acelerarse; si una presión P_I pone en movimiento a un volumen de fluido V, entonces la inercia acústica M se define como

$$P_I = M\ddot{V} \ . \tag{2.121}$$

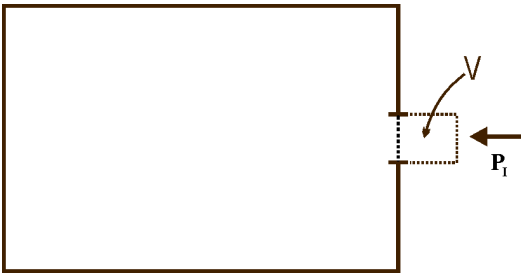

Figura 2.16. Resonador acústico. Una pequeña apertura en una caja permite que el fluido en su vecindad propague al interior de la caja una perturbación identificada por la presión P_I.

El volumen en la cavidad presenta una oposición a ser comprimido por la cantidad de volumen de fluido V entrando a la cavidad. El cambio en la presión del fluido P debido al incremento de este volumen V están relacionados de forma lineal por medio de la capacitancia acústica acústica C_a ,

$$P_c = -\frac{1}{C_a}V. \tag{2.122}$$

Esta expresión es análoga a la fuerza de un resorte al ser desplazado: $F = -kx$. En el caso acústico P equivale a la fuerza F, V equivale al desplazamiento x y C_a equivale a la capacitancia mecánica $1/k$; esta relación es válida mientras no se

pase del límite elástico, es decir, para cambios pequeños en el volumen. Al igual que en el sistema mecánico o en el eléctrico, existe también una disipación de energía en el sistema acústico; el fluido al tratar de entrar en la cavidad con velocidad dV/dt, fricciona con las paredes de la apertura y con el mismo fluido (resistencia con las paredes y viscosidad del fluido), además, el orificio puede producir sonido en el medio externo disipando la energía acústica, esta disipación la podemos escribir como sigue,

$$P_R = -R_a \, \dot{V}, \tag{2.123}$$

donde P_R es la presión por resistividad que mueve al volumen V con velocidad $\dot{V}$ a través del elemento disipativo R_a. Estos parámetros M, C_α y R_a pueden ser calculados (o medidos) para cualquier cavidad usando las definiciones (2.121), (2.122) y (2.123), estos parámetros dependen del tamaño de la apertura, el volumen y forma de la caja, el material del que esta hecha la caja, el tipo de fluido (su viscosidad).
El balance dinámico para estos elementos es

$$P_I = P_c + P_R \ ; \tag{2.124}$$

si además forzamos armónicamente el sistema acústico tendríamos la siguiente ecuación de movimiento

$$P_I - P_c - P_R = P_0 \cos \omega t, \tag{2.125}$$

o equivalentemente

$$M\ddot{V} + R\dot{V} + \frac{1}{C_a} V = P_0 \cos \omega t \ . \tag{2.126}$$

Esta ecuación es fácilmente reconocible como la del oscilador forzado cuando hacemos la identificación

$$m \to M, \ \ b \to R, \ \ k \to \frac{1}{C_a}, \ \ x \to V, \ \ F_0 \to P_0 \ .$$

La solución será también una parte transitoria que dependerá de las condiciones iniciales y la parte permanente resonante. En

este caso, el término resonante toma la forma de

$$V(t) = \frac{P_0/M}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{Ca}M\right)^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{4R^2}{M^2}\omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (2.127)$$

con

$$\tan\phi = \frac{\frac{R}{M}\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (2.128)$$

y la frecuencia natural del sistema es $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_a M}}$.

Los tres sistemas resonantes son equivalentes, desde el punto de vista de su ecuación de movimiento, su dinámica es equivalente y los parámetros físicos tienen también un significado similar. En la tabla 3.1 señalamos esta equivalencia.

sistema mecánico	**sistema eléctrico**	**sistema acústico**
x *posición*	q *carga*	V *volumen*
$\dot{x}$ *velocidad*	$\dot{q} = i$ *corriente*	$\dot{V}$ *velocidad volumétrica*
F *fuerza*	ε *fuerza electromotriz*	P *presión*
$1/k$ *capacitancia mecánica*	C *capacitancia*	C_a *capacitancia acústica*
m *masa inercial*	L *inercia electromagnética*	M *inercia acústica*
b *resistencia mecánica*	R *resistencia eléctrica*	R_a *resistencia acústica*

Tabla 3.1

Oscilaciones en dos dimensiones

Analizaremos ahora el movimiento de una partícula que se mueve en un plano horizontal libre de fricción y que se encuentra sujeta a dos fuerzas restitutivas lineales y mutuamente perpendiculares (ver figura (2.17.)).

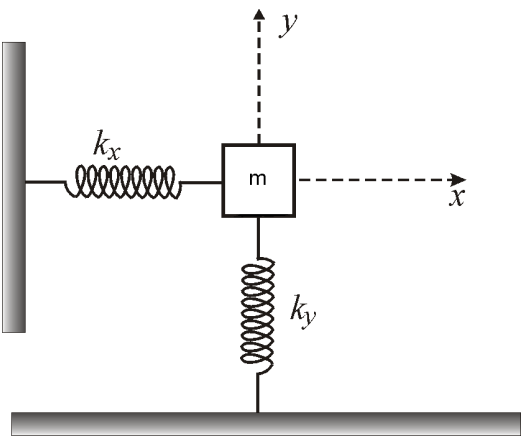

Figura 2.17. Oscilador anisótropo en un plano, las constantes de restitución son diferentes en cada dirección, no hay fricción y el plano es horizontal para eliminar la fuerza de gravedad.

Si los desplazamientos en torno a la posición de equilibrio son pequeños, la fuerza de restitución tiene los siguientes componentes

$$\mathbf{F} = (-k_x x, -k_y y) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \ . \tag{2.129}$$

Donde $\mathbf{p}$ es el momento lineal del objeto. Las ecuaciones de movimiento para cada componente son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= 0 \\ m\ddot{y} + k_y y &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.130}$$

estas ecuaciones están desacopladas y son fácilmente integra-

bles; con las siguientes soluciones,

$$\begin{aligned} x &= a\cos\left(\omega_x t + \theta_1\right) \\ y &= b\cos\left(\omega_y t + \theta_2\right) \ , \end{aligned} \tag{2.131}$$

donde a, b, θ_1 y θ_2 se determinan por las condiciones iniciales. Las frecuencias naturales de oscilación son: $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$ y $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$, con dos periodos diferentes $T_x = 2\pi/\omega_x$ y $T_y = 2\pi/\omega_y$. Analicemos la trayectoria; en la figura (2.18.) hemos graficado simultáneamente a $x\left(t\right)$ y $y\left(t\right)$.

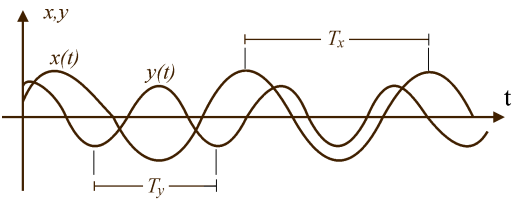

Figura 2.18. Soluciones $x(t)$ y $y(t)$ para un oscilador armónico anisótropo en dos dimensiones. Obsérvese que los periodos, las fases y las amplitudes para cada variable son diferentes.

Para que la trayectoria sea cerrada necesitamos que después de algún tiempo τ tanto x como y vuelvan a tener el mismo valor que tenían al tiempo t, esto es:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+\tau) \\ y(t) &= y(t+\tau). \end{aligned} \tag{2.132}$$

Esto nos conduce a la siguiente condición,

$$\begin{aligned} \cos\omega_x t &= \cos[\omega_x\left(t+\tau\right)] \\ \cos\omega_y t &= \cos[\omega_y\left(t+\tau\right)] \end{aligned} \tag{2.133}$$

imponiendo la siguiente condición,

$$\begin{aligned} \omega_x t &= \omega_x\left(t+\tau\right) + 2n\,\pi \\ \omega_y t &= \omega_y\left(t+\tau\right) + 2m\,\pi, \end{aligned} \tag{2.134}$$

n y n son enteros; esto es equivalente a que

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m} \, . \tag{2.135}$$

Las frecuencias ω_x y ω_y deben ser conmensurables. En la figura (2.19.) mostramos un ejemplo con $\omega_x = \frac{1}{3}\omega_y$. Las figuras que se describen en una trayectoria cerrada se llaman figuras de Lissajous. Si las frecuencias tienen un cociente irracional, la trayectoria no se cierra y cualquier punto en el rectángulo de ancho $2a$ y largo $2b$ puede ser alcanzado por la partícula después de un tiempo suficientemente largo.

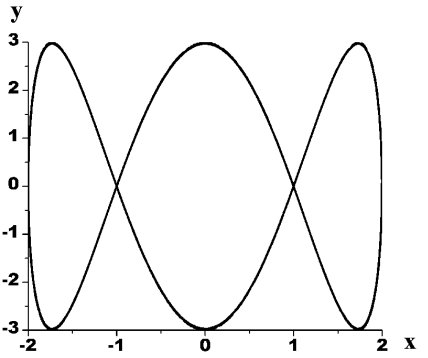

Figura 2.19. Trayectoria en el plano *(xy)* de un oscilador armónico anisótropo, en este caso $\omega_x = \frac{1}{3}\omega_y$. La figura que se describe es una figura de Lissajous. Las amplitudes graficadas aquí son arbitrarias.

Un caso interesante es aquel donde las frecuencias están degeneradas, $\omega_x = \omega_y \ (k_x = k_y)$, en este caso la trayectoria es cerrada y corresponde a una elipse. Si en este caso las amplitudes a y b son iguales, la trayectoria es circular, independientemente de la diferencia de fase. Este problema, aunque sencillo, puede ser resuelto también usando el teorema de conservación de la energía, (ver ejercicio al final del capítulo).

Oscilador armónico en tres dimensiones
El caso del oscilador armónico en tres dimensiones es de fácil solución siguiendo los mismos pasos del caso en dos dimensiones, la fuerza toma la forma:

$$\mathbf{F} = (k_x x, k_y y, k_z z), \tag{2.136}$$

y las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= 0 \\ m\ddot{y} + k_y y &= 0 \\ m\ddot{z} + k_x z &= 0, \end{aligned} \tag{2.137}$$

que tienen las siguientes soluciones,

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega_x t + \theta_1) \\ y &= b\cos(\omega_y t + \theta_2) \\ z &= c\cos(\omega_z t + \theta_1)\,. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Nuevamente, las amplitudes y fases se determinan por las condiciones iniciales. Las frecuencias angulares son $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$ y la condición para una órbita cerrada resulta ser:

$$n\omega_x = m\omega_y = l\omega_z, \tag{2.139}$$

con n, m, l enteros. Si esta condición no se cumple, la partícula puede cubrir todo el espacio del volumen abc en algún tiempo suficientemente largo.

Un caso de interés particular es el oscilador armónico isótropo, donde las tres constantes de restitución son iguales y decimos que el sistema está degenerado en sus frecuencias $\omega_x = \omega_y = \omega_z$. Esta degeneración corresponde a una simetría extra: no es posible distinguir físicamente a los ejes coordenados x, y, z; podemos

intercambiar los ejes coordenados y las ecuaciones de movimiento siguen siendo las mismas, *i.e.*, el sistema se comporta de la misma manera en cualquiera de sus ejes. La energía para este sistema degenerado se puede escribir como sigue,

$$E = \frac{m\omega^2}{2}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2), \tag{2.140}$$

donde x_0^2, y_0^2, z_0^2 son las amplitudes máximas en cada uno de los ejes, $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ es la norma del vector de maxima amplitud y esta norma es invariante ante cualquier rotación del sistema de ejes; además, en este caso, la trayectoria está contenida en un plano como mostraremos en el siguiente párrafo. Para el caso de un sistema sin degeneración este hecho no subsiste[20].

En el caso isotrópo la fuerza toma la forma siguiente,

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \tag{2.141}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición medido desde el origen. La fuerza es entonces central[21] y la variación del momento angular resulta ser:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \tag{2.142}$$

lo cual se puede expresar como:

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{2.143}$$

El momento de la fuerza $\mathbf{N}$, la torca, es nulo debido a que el primer término es cero (el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo); el segundo término igualmente, pues $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F} = k\mathbf{r}$ son también paralelos, el momento angular $\mathbf{L}$ es una constante en el tiempo (constante de movimiento). Para que la magnitud y dirección del vector $\mathbf{L}$ sea constante, es necesario que

[20] En la teoría cuántica, este tipo de osciladores degenerados tiene un comportamiento muy especial y de gran interés.

[21] Dirigida hacia un centro de fuerzas y es paralela al vector de posición medido desde ese centro.

los vectores **r** y **p** estén siempre en un plano perpendicular a la dirección del momento angular (el producto vectorial de **r** y **p** es siempre perpendicular a estos vectores y además es constante). Esto significa que el objeto se mueve en un plano. El plano de movimiento es aquel que contiene al vector de fuerza y a la velocidad inicial, si la velocidad inicial es nula el movimiento es en una línea recta.

Escogiendo el sistema de coordenadas de tal forma que el eje z coincida con la dirección del vector constante **L**, el movimiento se desarrollará en el plano xy. Esto es, el hecho de que exista una constante de movimiento, en este caso la dirección del momento angular, nos permite reducir el problema en un grado de libertad[22]. En este caso el problema se reduce al del oscilador armónico en dos dimensiones con la ventaja extra de que las constantes k_x y k_y son iguales y las frecuencias también, por lo tanto la órbita es cerrada con la siguiente solución,

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t + \theta_1) \\ y &= b\cos(\omega t + \theta_2) \ , \end{aligned} \tag{2.144}$$

si escogemos la orientación de los ejes xy de tal forma que en $t = 0$, $x_0 = a$ y $y_0 = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= b\,\mathrm{sen}\,\omega t, \end{aligned} \tag{2.145}$$

lo cual corresponde a una elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.146}$$

Si las condiciones iniciales son las apropiadas, podemos tener el caso donde $a = b$, la trayectoria es un círculo. Este problema es completamente soluble porque las ecuaciones de movimiento

[22]El número de grados de libertad es el número de variables independientes necesarias para describir completamente el movimiento.

están desacopladas, y porque hay una constante de movimiento que reduce el problema en un grado de libertad[23].

2.4.2. Movimientos pendulares

Péndulo simple
El modelo físico que hacemos para describir el movimiento de un péndulo es como sigue: en un campo gravitacional homogéneo, una masa puntual m cuelga de una cuerda inextensible de longitud ℓ y de masa despreciable. La fuerza aplicada es la fuerza de gravedad, la existencia de la cuerda restringe el movimiento de manera que la partícula esté siempre a una distancia igual a ℓ del punto de suspensión. Debido a esto aparece una fuerza de restricción que en este caso es la tensión de la cuerda, si la velocidad inicial está en el mismo plano que las fuerzas, la trayectoria es un arco de círcunferencia en un plano vertical (en este caso la tensión en la cuerda se ajusta a que el movimiento se realize sobre un arco circular). La fuerza de tensión no puede conocerse *a priori*; para conocerla es necesario primero eliminarla de la descripción y una vez resuelto el movimiento se puede calcular esta fuerza de restricción. En la figura (2.20.) esquematizamos este sistema mecánico.

Aplicando la segunda ley de Newton y proyectando las fuerzas en la dirección tangente y normal a la trayectoria, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$-m\ell\ddot{\theta} = mgsen\theta, \tag{2.147}$$

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \tag{2.148}$$

[23]Aquí hemos usado sólo una integral de movimiento. En realidad este problema es soluble porque para sus tres grados de libertad hay tres constantes de movimiento: la energía, la dirección del momento angular y la componente z del momento angular; ésta lo hace separable y la energía lo hace integrable; ver capiítulos 4 y 5.

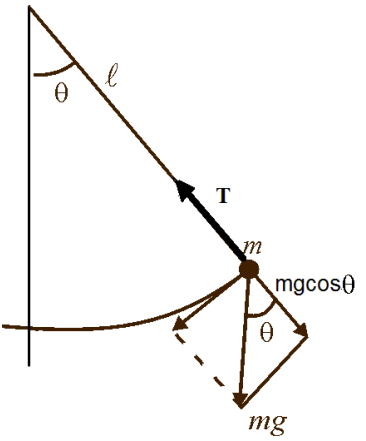

Figura 2.20. Péndulo simple. Una partícula puntual cuelga de una cuerda de longitud constante y masa despreciable, las condiciones iniciales son tales que el movimiento es en un plano vertical.

La primera de estas ecuaciones es la segunda ley de Newton para la componente tangencial, la cual proporciona la ecuación de movimiento de la partícula sobre un arco de circunferencia de radio ℓ; la segunda ecuación es la segunda ley de Newton para la componente radial, la cuerda impide que haya movimiento en la dirección radial $\dot{r} = 0$ (cer ecuación 1.90), esta ecuación proporciona la fuerza de tensión T como función de la variable θ, es decir, para conocer la fuerza de tensión primero debe resolverse la ecuación (2.147). Debido a la restricción impuesta por la cuerda sólo queda un grado de libertad, la única ecuación diferencial que debemos resolver es entonces:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} sen\theta = 0. \tag{2.149}$$

Esta ecuación diferencial no es soluble en términos de funciones simples; sin embargo, una aproximación para oscilaciones de pequeña amplitud tiene solución simple. Suponiendo que las oscilaciones son de amplitud muy pequeña, un desarrollo a primer

orden en serie de Taylor para la función $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, nos conduce a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \,, \tag{2.150}$$

la cual es la familiar ecuación armónica y cuya solución es bien conocida:

$$\theta\,(t) = \theta_0 \cos\left(\omega t + \alpha_1\right), \tag{2.151}$$

donde la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{g/\ell}$, con el correspondiente periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, es decir, el periodo crece con la longitud de la cuerda. Las constantes θ_0, amplitud de la oscilación y α_1 su fase se determinan por las condiciones iniciales. Ésta es la conocida solución armónica para el péndulo simple (en la aproximación de pequeñas amplitudes de oscilación). Una vez que se ha resuelto para el ángulo θ, la tensión puede ser conocida mediante la ecuación (2.148).

Péndulo no isócrono

El caso del péndulo en oscilaciones más grandes lo podemos también resolver de la siguiente forma: debido a que la fuerza aplicada es conservativa y que la fuerza de tensión no hace trabajo, porque es perpendicular al posible desplazamiento, podemos usar el método de la energía y escribir la energía total del sistema como sigue,

$$E = T + V(\theta) = \frac{1}{2}\, m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\,(1 - \cos\theta) \;, \tag{2.152}$$

de esta forma la energía proporciona una primera integral y la ecuación de movimiento resultante es de primer orden: Si la condición inicial es: en $t = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$ y $\theta = \theta_0 \neq 0$. y el origen de la función potencial está en el punto más bajo de la trayectoria $\theta = 0$, el valor de esta constante resulta ser,

$$E = mg\ell\,(1 - \cos\theta_0) = cte, \tag{2.153}$$

donde θ_0 es la amplitud, donde la energía es puramente energía potencial. Combinando las ecuaciones (2.152) y (2.153) obtenemos para la velocidad angular

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right), \tag{2.154}$$

que podemos arreglar como sigue,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{\ell}\left(sen^2\frac{\theta_0}{2} - sen^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{2.155}$$

donde usamos el hecho de que $\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$. Si ahora cambiamos la variable a ϕ por medio de:

$$sen\phi = \frac{1}{k}sen\frac{\theta}{2} = \frac{sen\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta_0}{2}}\ ,\ \text{con} \quad k = sen\frac{\theta_0}{2} \tag{2.156}$$

la ecuación de movimiento se transforma en

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 - k^2\, sen^2\,\phi\right)\ . \tag{2.157}$$

Esta ecuación puede ser integrada fácilmente a la siguiente cuadratura,

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\phi}\frac{d\phi'}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\,\phi'}}. \tag{2.158}$$

Definimos la integral elíptica incompleta de primer tipo como sigue,

$$F\left(k,\phi\right) = \int_0^{\phi}\frac{d\phi'}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\,\phi'}}\ , \tag{2.159}$$

donde el valor de θ_0 condiciona el valor de k, de esta forma tendremos que

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}F\left(k,\phi\right)\ . \tag{2.160}$$

El periodo resulta ser cuatro veces el tiempo que toma el movimiento entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_0$ *i.e.* entre $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$,

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\, \phi}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K\left(k\right). \tag{2.161}$$

$K\left(k\right)$ es la función elíptica completa de primer tipo, nótese que $\phi = \pi/2$ implica $\theta = \theta_0$. La función elíptica se puede calcular numéricamente con buena aproximación. Haciendo el desarrollo en serie del integrando, de la ecuación (2.159) tendremos que

$$F\left(k, \phi\right) = \int_0^{\phi} d\phi \left(1 + \frac{k^2}{2}\, sen^2\, \phi + \frac{3}{4} k^4\, sen^4\, \phi + ...\right), \tag{2.162}$$

de esta última expresión podemos obtener una aproximación para el período

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4} k^4 \int_0^{\phi} sen^4\, \phi d\phi + ... \right\}, \tag{2.163}$$

simplificando esta expresión, obtenemos lo siguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}\, sen^2 \frac{\theta_0}{2} + ... \right\}. \tag{2.164}$$

Debido a que $k = \text{sen}\frac{\theta_0}{2}$, si $k^4 \ll k^2$ $(\theta << \theta^2)$, la primera corrección al período del péndulo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{4}\, sen^2 \frac{\theta_0}{2}, \tag{2.165}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, la frecuencia del péndulo simple. Si $\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2}$ es despreciable, recuperamos la solución armónica. Cuando la amplitud θ_0 no es muy pequeña, el periodo T depende de ella, esta corrección hace que el movimiento no sea armónico simple, aún así, el movimiento sigue siendo periódico y su solución está

dada por la expresión (2.161). Este tipo de movimiento periódico donde el periodo depende de la amplitud de oscilación, se llama no isócrono.

Péndulo isócrono

Deseamos saber sobre qué curva plana vertical sin fricción debe desplazarse una partícula en presencia de un campo gravitacional para que tenga un movimiento armónico simple con período T, de tal forma que el periodo de oscilación no dependa de la amplitud de oscilación; a este movimiento le llamaremos isócrono. Llamamos θ al ángulo entre la tangente a la curva C y la dirección horizontal, e identificamos al movimiento por el arco s. De acuerdo a la figura (2.21.); la componente de la fuerza que determina el movimiento sobre la curva es la componente del peso a lo largo de la tangente a la curva; la ecuación de movimiento es entonces:

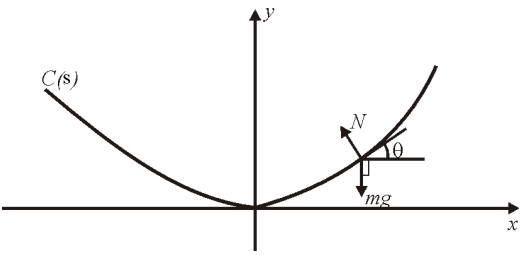

Figura 2.21. La partícula puntual se desplaza sin fricción en una curva C contenida en un plano vertical en torno al mínimo de potencial.

$$m\ddot{s} = -mg\ sen\ \theta \tag{2.166}$$

para que este movimiento sea armónico simple e isócrono, debe satisfacer la ecuación armónica:

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0, \tag{2.167}$$

esta condición la satisface un desplazamiento en el arco s tal

que,

$$s = \frac{g}{\omega^2}\, sen\ \theta.$$

De esta dependencia podemos obtener la forma paramétrica de la curva c con el siguiente procedimiento,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta\left(\frac{g}{\omega^2}\cos\theta\right)\\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta} = sen\,\theta\left(\frac{g}{\omega^2}\cos\theta\right)\ .\end{aligned}$$

Ambas ecuaciones pueden ser integradas inmediatamente,

$$\begin{aligned}x &= \int \frac{g}{\omega^2}\cos^2\theta\ d\theta\\ y &= \int \frac{g}{\omega^2}\ sen\,\theta\ \cos\theta\ d\theta\end{aligned}$$

después de la integración,

$$\begin{aligned}x &= \frac{g}{4\omega^2}\left(2\theta - sen\ 2\theta\right) + c_1\\ y &= \frac{g}{4\omega^2}\cos 2\theta + c_2.\end{aligned} \tag{2.168}$$

c_1 y c_2 son dos constantes de integración que dependen de los parámetros de la curva . Estas son las ecuaciones paramétricas de la curva en términos del parámetro θ, el ángulo de la tangente a la curva con la horizontal. Esta curva es una cicloide. Desafortunadamente θ no puede ser eliminado de estas ecuaciones; sin embargo, todas sus propiedades pueden obtenerse de su forma paramétrica, en la figura (2.22.) representamos a esta curva. Una partícula moviéndose sobre una cicloide sin fricción, tendrá un movimiento armónico simple, isócrono.

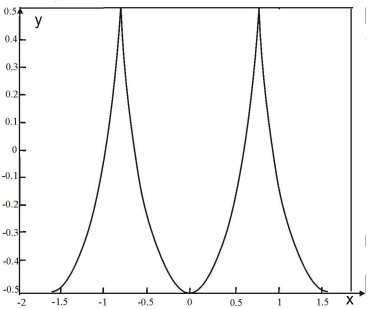

Figura 2.22. La partícula moviéndose en un arco de esta cicloide tiene un movimiento isócrono en el cual el periodo no depende de la amplitud de la oscilación. En esta gráfica la amplitud para las variables x, y se escogió tal que $g/\omega^2 = 1$.

Péndulo esférico

Ahora permitiremos que el péndulo se mueva en tres dimensiones, escogiendo la velocidad inicial fuera del plano donde están las fuerzas actuantes. Por comodidad colocamos el origen de coordenadas en el punto de suspensión y la dirección z en la dirección vertical hacia arriba. Usaremos el sistema de coordenadas que se ilustra en la figura (2.23.), el cual no es el usual sistema esférico de coordenadas; sin embargo, también es ortogonal y sirve muy bien a nuestro propósito. La componente de la fuerza mg sen θ está en el plano definido por la cuerda y el eje z, es decir, en la dirección de $\widehat{u}_\theta$, de tal forma que las componentes de las fuerzas en este sistema coordenado son las siguientes,

$$\begin{aligned} ma_r &= mg\cos\theta - T = 0 \\ ma_\theta &= -mg\ sen\ \theta \\ ma_\phi &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.169}$$

Las componentes de la aceleración las podemos obtener de

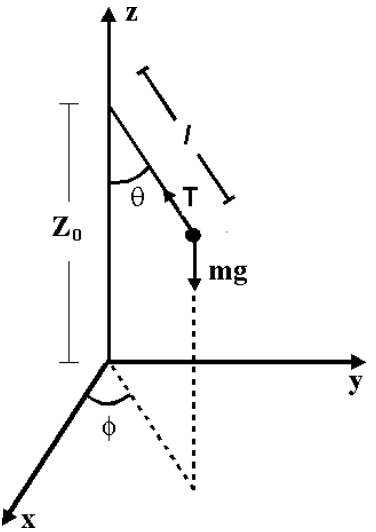

Figura 2.23. Péndulo esférico. Las condiciones iniciales permiten que el movimiento pendular se efectué en tres dimensiones.

las ecuaciones (1.97) cambiando $\theta \to \pi - \theta$; de esta forma obtenemos que

$$mg\cos\theta - T = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 sen^2\,\theta\right) \tag{2.170}$$

$$-mg\ sen\ \theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\ sen\ \theta\cos\theta\right) \tag{2.171}$$

$$ma_\phi = 0 = m\left(r\ddot{\phi}\ sen\,\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\ sen\,\theta + \right.$$
$$\left. + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right). \tag{2.172}$$

La restricción $r = \ell$ nos permite reducir el problema, pues $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$; la fuerza que restringe al movimiento es la tensión

$$T = m\left(g\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2 + \ell\dot{\phi}^2 sen^2\theta\right).$$

Las ecuaciones restantes nos llevan a dos ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^{2} \, sen\ \theta \cos\theta + \frac{g}{\ell} \, sen\ \theta = 0. \tag{2.173}$$

$$\ddot{\phi}\ sen\,\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta = 0\ . \tag{2.174}$$

De la segunda ecuación tenemos una integral directa,

$$\frac{1}{sen\ \theta}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\, sen^2\theta\right) = 0\ , \tag{2.175}$$

equivalentemente

$$\dot{\phi} sen^2\theta = cte = c_1, \tag{2.176}$$

despejando $\dot{\phi}$ y sustituyendo en la ecuación (2.173) obtenemos la ecuación de movimiento para la coordenada θ,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} sen\ \theta - c_1^2 \frac{\cos\theta}{sen^3\theta} = 0\ . \tag{2.177}$$

Esta ecuación no tiene solución analítica, sin embargo se pueden estudiar casos particulares y algunas aproximaciones. Dos casos especiales de esta ecuación son notables: el primero de ellos corresponde a las condiciones iniciales, $\dot{\phi}(t = 0) = 0$ y $\theta(t = 0) = \theta_0$. Que corresponde a $c_1 = 0$ y la ecuación de movimiento se reduce a la del péndulo plano de la sección anterior, ecuación (2.176); debido a que $\dot{\phi}(t = 0) = 0$, la velocidad inicial y la fuerza se encuentran en un plano vertical.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} sen\ \theta = 0\ . \tag{2.178}$$

El segundo caso, $\theta = cte = \theta_0$ obligan a que $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ sean también nulas; la ecuación (2.177) se reduce en este caso a,

$$\frac{g}{\ell} sen\ \theta_0 - c_1^{\,2} \frac{\cos\theta_0}{sen^3\theta_0} = 0\ , \tag{2.179}$$

de aquí tenemos que

$$\overset{2}{c_1} = \frac{g}{\ell}\frac{sen^4\theta_0}{\cos\theta_0}\ , \tag{2.180}$$

lo cual nos permite calcular $\dot{\phi}$, que también será una constante de acuerdo a la ecuación (2.176)

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta_0}}\ . \tag{2.181}$$

A este movimiento se le conoce con el nombre de péndulo cónico, *i.e.*, la cuerda del péndulo es la generatriz de un cono circular. Un caso aproximado que también podemos estudiar es el de un péndulo casi cónico, donde θ varía muy poco con respecto a θ_0; si en la ecuación (2.177) desarrollamos sen θ y $\cos\theta$ en la vecindad del punto θ_0 obtenemos,

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{\ell}K\,\Theta = 0 \tag{2.182}$$

donde hemos puesto $\Theta = \theta - \theta_0$ y $K = 3\cos\theta_0 + \text{sen}\ \theta_0$. La ecuación (2.182) tiene solución armónica para la variable Θ,

$$\Theta = \Theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{gK}{\ell}}t + \gamma\right), \tag{2.183}$$

con frecuencia

$$\Omega = \sqrt{\frac{gK}{\ell}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(3\cos\theta_0 - sen\ \theta_0\right)}\ . \tag{2.184}$$

Si el movimiento en tres dimensiones es periódico (órbita cerrada) se cumple que

$$\frac{\Omega}{\dot{\phi}_0} = \frac{n}{m} \tag{2.185}$$

con n y m enteros, esta condición se satisface cuando

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(3\cos\theta_0 - sen\ \theta_0\right)} = \frac{n}{m}\dot{\phi}_0\ . \tag{2.186}$$

Si $n = m$, la proyección sobre el plano xy de la trayectoria es una elipse. Cuando la condición de órbita cerrada no se cumple, la trayectoria es una elipse que precede. El movimiento general de la partícula sobre la esfera de radio ℓ es como se ilustra en la figura (2.24.). Un método alternativo para resolver este problema es usando la conservación de la energía y la conservación de la componente z del momento angular (ver capítulo 5). Otros movimientos pendulares interesantes como: el péndulo de Foucault, el péndulo físico y el péndulo doble los estudiaremos en capítulos posteriores.

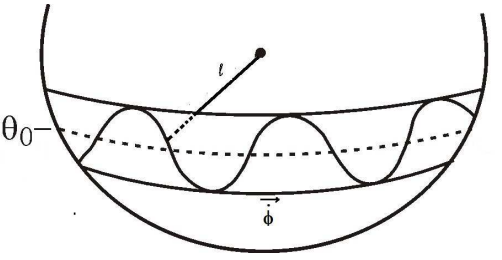

Figura 2.24. Proyección sobre la esfera del movimiento del péndulo esférico.

2.5. Fuerzas electromagnéticas

Una partícula cargada en presencia de cargas y corrientes, experimenta un fuerza debida a los campos eléctricos producidos por el resto de cargas presentes y campos magnéticos producidos por cargas en movimiento en forma de corrientes y objetos magnéticos. Esta fuerza se describe apropiadamente por la llamada fuerza de Lorentz, la cual actúa sobre una partícula de masa m y carga e[24]. En el sistema internacional de unidades

[24]Claramente, la fuerza de Lorentz es también una ley de fuerza fundamental. Denotamos a la carga con el símbolo e para distinguirla de las

(SI) la fuerza de Lorentz es:

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{2.187}$$

donde $\mathbf{E}$ identifica al campo eléctrico mientras que $\mathbf{B}$ al campo de inducción magnética, $\mathbf{v}$ es la velocidad instantánea de la partícula. El movimiento de la partícula puede ser descrito al aplicar la segunda ley de Newton a la fuerza de Lorentz, es decir,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{2.188}$$

junto con las condiciones iniciales nos permitirá conocer la trayectoria $\mathbf{r}\left(t\right)$.

Las componentes de la ecuación vectorial (2.188) se pueden escribir como sigue,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_x + e\left(v_y B_z - v_z B_y\right) \\ m\ddot{y} &= eE_y + e\left(v_z B_x - v_x B_z\right) \\ m\ddot{z} &= eE_z + e\left(v_x B_y - v_y B_x\right) \ . \end{aligned} \tag{2.189}$$

Como ejemplo consideremos un caso simple en el cual los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son homogéneos y están ambos dirigidos a lo largo del eje vertical, estos es,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\widehat{k}\ , \quad \mathbf{B} = B_0\widehat{k}\ , \tag{2.190}$$

y consideremos que la gravedad está actuando, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= e\dot{y}B_0 \\ m\ddot{y} &= -e\dot{x}B_0 \\ m\ddot{z} &= eE_0 - mg\ . \end{aligned} \tag{2.191}$$

Las ecuaciones (2.191) están acopladas en sus componentes x y y mientras que la componente z está desacoplada, las

coordenadas generalizadas q que usaremos mas adelante, la carga del electrón se denota por e_0.

dos primeras pueden ser integradas rápidamente mientras que la componente z tiene por solución la de un movimiento uniformemente acelerado,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{eB_0}{m} y + k_1 \\ \dot{y} &= -\frac{eB_0}{m} x + k_2 \ , \end{aligned} \tag{2.192}$$

las constantes k_1 y k_2 son las condiciones iniciales para las componentes de la velocidad. Sustituyendo la segunda de estas ecuaciones en la primera de las ecuaciones (2.191) obtenemos

$$\ddot{x} = -\omega_c^2 x + \omega_c k_2 \ , \tag{2.193}$$

cuya solución es bien conocida,

$$x = \frac{k_2}{\omega_c} + A\cos\left(\omega_c t + \theta_0\right) \ , \tag{2.194}$$

a $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ se le conoce con el nombre de frecuencia de ciclotrón. Las constantes $k_1,\ k_2,\ A$ y θ_0 dependen de las condiciones iniciales. Sustituyendo (2.194) en la segunda de las ecuaciones (2.191) obtenemos la solución para $y\left(t\right)$,

$$y = c - Asen\ \left(\omega_c t + \theta_0\right) \ , \tag{2.195}$$

la constante c se puede obtener sustituyendo (2.195) en la primera de las ecuaciones (2.192), resultando $c = -k_1/\omega_c$; también es fácil probar que:

$$\left(x - \frac{k_2}{\omega_c}\right)^2 + \left(y + \frac{k_1}{\omega_c}\right)^2 = A^2, \tag{2.196}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2\omega_c^2 = v_0^2 \ . \tag{2.197}$$

Esto es, la proyección de la trayectoria en el plano xy es un círculo centrado en $\left(\frac{k_2}{\omega_c}, -\frac{k_1}{\omega_c}\right)$ y tiene radio v_0/ω_c; el módulo

de esta velocidad en este plano es una constante y el radio depende de las condiciones iniciales, la frecuencia ω_c depende de la intensidad del campo B_0, y los parámetros del sistema m y e. A esto sólo hay que añadir que el movimiento en la dirección del campo (z) es un movimiento uniformemente acelerado con aceleración

$$a_z = \frac{eE_0}{m} - g \ , \tag{2.198}$$

la frecuencia de ciclotrón no depende de la velocidad de la partícula, la órbita es una hélice ascendente o descendente dependiendo de que la acelearción a_z sea positiva o negativa, el paso de la hélice se incrementa conforme avanza el tiempo, si $mg = eE_0$ la partícula se mueve en un círculo horizontal, el campo eléctrico y el peso se anulan.

2.6. Ejercicios

1. En un experimento mecánico una partícula se mueve en la siguiente trayectoria:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\
x(t) &= x_0 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \\
y(t) &= y_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \\
z(t) &= a + bt + \frac{1}{2} ct^2.
\end{aligned}
$$

   a) ¿Cuál es la fuerza que causa este movimiento?

   b) ¿Es cerrada la órbita?

   c) Describa el movimiento y diga ¿a qué tipo de movimiento corresponde?

2. Resuelva el oscilador armónico en una dimensión $F_x = -k_x x$, usando la conservación de la energía.

3. Resuelva el problema del tiro parabólico sin fricción; esto es, un proyectil de velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ que hace un ángulo θ con la horizontal. Calcule la altura máxima que alcanza el proyectil y su alcance máximo.

4. Obtenga una expresión aproximada para la altura máxima que alcanza un proyectil en un medio disipativo, ecuación (2.65).

5. Un bloque de masa m se encuentra en un plano inclinado como se muestra en la figura (2.7.), entre el bloque y el plano existe una fricción cuyo coeficiente estático vale μ. El bloque se suelta desde el reposo y baja el plano, use el teorema trabajo-energía y conteste las siguientes preguntas: a) Si se suelta desde el reposo en el extremo superior y el plano tiene longitud L ¿Con qué velocidad llega la partícula al punto más bajo del plano?

b) En el punto más bajo del plano inclinado está un resorte de constante k, ¿cuánto es comprimido el resorte por la partícula bajando el plano?

6. Una partícula está sujeta a la fuerza
   $F(x) = 2F_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{x}{a}\right)$,
   a) ¿Qué dimensiones deben tener a y F_0?
   b) Calcule la función potencial.
   c) Describa cualitativamente los posibles movimientos de esta partícula dependiendo de sus condiciones iniciales.

7. Resuelva el oscilador armónico isótropo bidimensional, $k_x = k_y$, considere las condiciones iniciales siguientes: $x(t=0) = y(t=0) = a$ y que $\dot{x}(t=0) = 0$ y $\dot{y}(t=0) = v_0$, Obtenga la trayectoria $\mathbf{r}(t)$.

8. En la figura (2.25.) se muestra una partícula de masa m que se desplaza sobre una via. Entre la via y la partícula hay una fuerza de fricción cuyo coeficiente estático es $\mu = 0.1$; entre el rizo y la partícula no hay fricción. La otra fuerza aplicada sobre la partícula es la gravedad, la partícula se suelta en ese punto sin velocidad inicial. ¿Con qué velocidad llega al punto más alto del rizo?, ¿puede la partícula completar su viaje sobre el rizo?

9. Demuestre que en el oscilador armónico simple, el promedio temporal de la energía cinética y de la energía potencial sobre un periodo son iguales.

   Un oscilador armónico amortiguado en una dimensión (ecuación(2.100)) se encuentra forzado por una función periódica, de tal forma que puede ser expresada como una serie de Fourier:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l sen\ (l\Omega_0 t).$$

   Analice las posibilidades de que ocurra una resonancia.

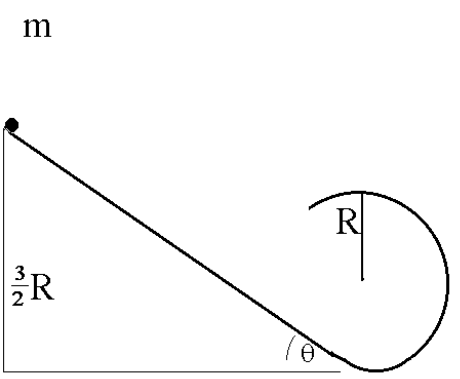

Figura 2.25. Una partícula desplazandose en una via con fricción y un rizo sin fricción.

10. Un objeto cayendo verticalmente está sujeto a la gravedad y a una fuerza resistiva $-bv^2$.

    a) Resuelva el movimiento, calcule la posición, la velocidad y obtenga la velocidad terminal.

    b) Si el objeto tiene masa $m = 65kg$ y alcanza su velocidad terminal de $120km/hr$ ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción b?

11. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa $F(x)$ cuya función potencial se muestra en la parte c de la figura (2.8. y la partícula sólo puede moverse en la dirección positiva del eje x.

    a) Describa cualitativamente el movimiento cuando: i) $E > V_0$, ii) $V_0 > E > V_1$, iii) $V_1 > E > 0$, iv) $0 > E > V_2$, v) $V_2 > E$.

    b) Si el potencial es $V(x) = kx^2/2$, ¿Cuál es la trayectoria $x(t)$?

12. Un péndulo no isócrono de longitud l en el campo gravitacional terrestre tiene una amplitud θ_0, Calcule la correc-

ción hasta cuarto orden en $sen\theta_0$.

13. Una rueda de bicicleta de radio R rueda sin resbalar verticalmente con velocidad angular constante, en uno de sus rayos se encuentra una partícula a una distancia a del eje de la rueda. Demuestre que su trayectoria es una cicloide con el tiempo como parámetro (ver ecuación 2.168). Grafique la órbita en el plano xy. Estudie los casos límite donde $a \longrightarrow 0$ y $a \longrightarrow R$ ¿Cómo es la trayectoria si el eje de la rueda se mueve con aceleración constante.

14. Identifique la constante de movimiento representada en la ecuación (2.175).

15. La siguiente afirmación es errónea: el oscilador armónico isótropo en dos dimensiones y un planeta en el campo gravitacional del Sol se mueven en una órbita elíptica; entonces, ambos tienen la misma ley de fuerza. ¿Cuál es el error? (ver la sección (6.4) y problema (6.5)).

3

SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES

En este capítulo estudiamos las correcciones que deben introducirse a la ecuación de movimiento por el hecho de que el sistema de observación no cumple con el principio 1; es decir, no es un SIR. Estudiamos las diversas formas en las que deben escribirse las ecuaciones de movimiento cuando el sistema de referencia se mueve respecto de un SIR: con aceleración lineal y cuando éste rota con respecto al SIR. Debido a que el SIR cumple con los principios enunciados en el capítulo anterior, escribimos en éste la ley de movimiento y la transformamos al sistema no inercial de referencia (SNIR). Analizamos los efectos no inerciales para sistemas acelerados y en rotación, en particular, analizamos los efectos causados por el movimiento de la Tierra, nuestro sistema natural de observación. Las referencias recomendadas para este tema son: [1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17].

3.1. Transformación de coordenadas

Hasta ahora hemos usado la segunda ley de Newton para describir el movimiento de una partícula con la condición de que el sistema de referencia utilizado sea un sistema inercial de referencia (SIR). Las ecuaciones de movimiento son las mismas para este SIR y para todo aquel sistema de referencia que se mueva con velocidad constante respecto a éste. Si entre dos sistemas la

regla de transformación es la de Galileo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{u}\ t\ , \\ t &= t'\ ; \end{aligned} \tag{3.1}$$

la segunda ley de Newton es invariante ante esta transformación, esto es,

$$F = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^{\,2}}, \tag{3.2}$$

y ambos sistemas son SIR, en particular ambos sistemas miden la misma aceleración del objeto. Sin embargo, esto ya no es válido cuando el segundo sistema no se mueve con una velocidad constante.

Cuando el sistema no es SIR, la segunda ley de Newton debe modificarse. Consideremos un sistema inercial de referencia S y un sistema S' que se mueve con respecto al primero, el sistema S' puede acelerarse y rotar (SNIR). Suponiendo que una partícula se encuentra en el punto P al tiempo t, el sistema S la identifica por $\mathbf{r}\,(t)$ mientras que el sistema S' lo hace por $\mathbf{r}'\,(t')$ (recordemos que clásicamente $\Delta t = \Delta t'$). Ambas descripciones están conectadas por la posición instantánea (ver figura (3.1.))

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t), \tag{3.3}$$

donde $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ corresponde al vector de posición del origen S' medido desde el sistema S, de tal forma que la primera derivada nos conduce a

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'. \tag{3.4}$$

Escribamos al vector de posición $\mathbf{r}'$ de la siguiente forma,

$$\mathbf{r}' = x'\,\widehat{i}' + y'\,\widehat{j}' + z'\,\widehat{k}'\ , \tag{3.5}$$

donde $\widehat{i}'$, $\widehat{j}'$, $\widehat{k}'$ son los vectores unitarios en las direcciones x', y', z' del sistema S'. De esta forma obtenemos que

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \widehat{i}'\dot{x}' + \widehat{j}'\dot{y}' + \widehat{k}'\dot{z}' + x'\frac{d\widehat{i}'}{dt} + y'\frac{d\widehat{j}'}{dt} + z'\frac{d\widehat{k}'}{dt}\ , \tag{3.6}$$

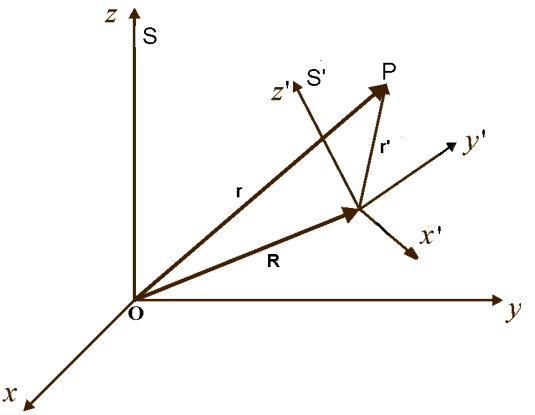

Figura 3.1. El sistema S es un sistema inercial de referencia, el sistema S' se acelera y rota con respecto al sistema S, los orígenes de ambos sistemas coinciden en $t = 0$. Al tiempo t el origen $\mathbf{O}'$ se encuentra en el punto de coordenadas $\mathbf{R}$ medido desde el origen de S.

esta expresión la podemos reescribir como sigue

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\}_{rot} + x'\frac{d\widehat{i}'}{dt} + y'\frac{d\widehat{j}'}{dt} + z'\frac{d\widehat{k}'}{dt}, \tag{3.7}$$

donde $\{\dot{\mathbf{r}}'\}_{rot}$ es la velocidad de la partícula medida desde el sistema S'. Los términos restantes corresponden a la rotación del sistema S' y deben ser analizados separadamente.

Cualquier rotación está identificada por la rapidez angular de rotación ω (ver figura 3.2.), y por el vector unitario $\widehat{\mathbf{n}}$, alrededor del cual giran los ejes del sistema no inercial; $\widehat{\mathbf{n}}$ es el eje instantáneo de giro.

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\widehat{\mathbf{n}}\ .$$

Las derivadas con respecto del tiempo de los vectores base pueden ser calculados de la siguiente manera: debido a que la magnitud del vector es la unidad, en primera aproximación obtenemos para $\Delta\widehat{i}'$, (ver figura (3.3.))

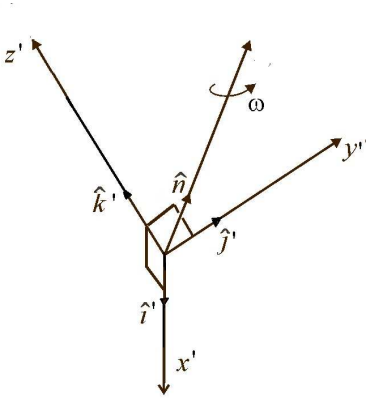

Figura 3.2. El sistema $S^{'}$ rota alrededor del eje definido por el vector unitario $\mathbf{n}$ con rapidez angular ω.

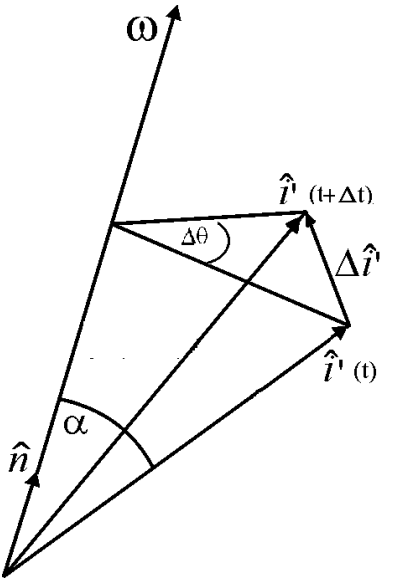

Figura 3.3. La rotación alrededor el eje $\mathbf{n}$ cambia el vector $i'(t)$ por $i'(t + \Delta t)$ en un tiempo Δt.

$$\left|\Delta\widehat{i'}\right| = \Delta\theta \cdot sen\ \alpha \tag{3.8}$$

y el valor absoluto de la derivada temporal es:

$$\left|\frac{d\widehat{i'}}{dt}\right| = \omega sen\ \alpha\ , \qquad \omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{3.9}$$

la dirección de este vector es tanto perpendicular a $\widehat{i'}$ como a $\overrightarrow{\omega}$; de acuerdo a la definición del producto vectorial podemos escribir que

$$\frac{d\widehat{i'}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \widehat{i'}, \tag{3.10}$$

de manera completamente análoga tendremos que

$$\frac{d\widehat{j'}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \widehat{j'} \tag{3.11}$$

$$\frac{d\widehat{k'}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \widehat{k'}\ . \tag{3.12}$$

Finalmente podemos escribir la ecuación (3.7) como sigue

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\}_{r\circ t} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}'. \tag{3.13}$$

Esta ecuación relaciona a la derivada temporal de cualquier vector en el sistema inercial S con la derivada temporal en el sistema desplazado y rotado (no inercial) S'. Para cualquier vector $\mathbf{B}$, medido en un SIR y el correspondiente vector $\mathbf{B'}$ medido en un SNIR sus evoluciones temporales están relacionadas por la siguiente ecuación

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \left\{\frac{d\mathbf{B}'}{dt}\right\}_{r\circ t} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{B}'. \tag{3.14}$$

Formalmente podemos escribir la relación de estas derivadas como sigue

$$\frac{d}{dt} = \left\{\frac{d}{dt}\right\}_{r\circ t} + \overrightarrow{\omega} \times\ . \tag{3.15}$$

La parte izquierda de la ecuación se aplica a los vectores medidos desde el sistema inercial S, mientras que la parte derecha se aplica a los vectores medidos desde el sistema no inercial S'.

La aceleración la obtenemos fácilmente aplicando dos veces la ecuación (3.15) a (3.4), esto es,

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)=\left[\left\{\frac{d}{dt}\right\}_{r\circ t}+\overrightarrow{\omega}\times\right]\left[\left\{\frac{d}{dt}\right\}_{r\circ t}+\overrightarrow{\omega}\times\right]\mathbf{r}'\,, \tag{3.16}$$

esta ecuación la podemos simplificar como sigue,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}-\ddot{\mathbf{R}}=&\left\{\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right\}_{r\circ t}+2\overrightarrow{\omega}\times\left\{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right\}_{r\circ t}+\left\{\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}\right\}_{r\circ t}\times\mathbf{r}'+\\&+\overrightarrow{\omega}\times\left(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r}'\right);\end{aligned} \tag{3.17}$$

usando la notación usual para las derivadas temporales escribimos que

$$\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{A}+\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\}_{r\circ t}+2\overrightarrow{\omega}\times\left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\}_{r\circ t}+\left\{\dot{\overrightarrow{\omega}}\right\}_{r\circ t}\times\mathbf{r}'+\overrightarrow{\omega}\times\left(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r}'\right), \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{A}=\ddot{\mathbf{R}}$ es la aceleración lineal del sistema S' medida desde S, el símbolo $\{\}_{r\circ t}$ significa derivadas temporales en el sistema S' (ver ecuación (3.7)), las cantidades con prima son medidas en el sistema S'. Aunque esta notación es redundante, resulta útil y evita confusiones.

Con ayuda de la ecuación (3.18) podemos ahora escribir la forma apropiada para la segunda ley de Newton en el sistema no inercial. En el sistema S (SIR) la dinámica de la partícula está regida por la ecuación de movimiento

$$\mathbf{F}=m\ddot{\mathbf{r}},$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza aplicada debida a las interacciones que podemos establecer como leyes de fuerza, equivalentemente las fuerzas que no dependen del movimiento del sistema de observación.

Sustituyendo $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ en la ecuación (3.18) obtenemos que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} + \mathbf{m}\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} + 2m\overrightarrow{\omega}\times\left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\} + m\left\{\dot{\overrightarrow{\omega}}\right\}\times\mathbf{r}' + m\overrightarrow{\omega}\times\left(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r}'\right) \ , \tag{3.19}$$

esto es, la ecuación dinámica en el sistema no inercial se escribe como sigue,

$$\mathbf{m}\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - 2m\overrightarrow{\omega}\times\left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\} - m\left\{\dot{\overrightarrow{\omega}}\right\}\times\mathbf{r}' - m\overrightarrow{\omega}\times\left(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r}'\right) \ , \tag{3.20}$$

en esta ecuación hemos suprimido el índice *rot* en el corchete .

La ecuación de movimiento para el sistema no inercial se modifica: a la fuerza aplicada $\mathbf{F}$ deben añadirse términos no inerciales, debidos al movimiento del sistema de observación no inercial. El término $-m\mathbf{A}$ es la fuerza inercial debida a la aceleración ($\ddot{\mathbf{R}}$) del sistema en movimiento. El término $-2m\overrightarrow{\omega}\times\{\dot{\mathbf{r}}'\}$ corresponde a la llamada fuerza de Coriolis; ésta es perpendicular al eje de rotación y a la velocidad de la partícula $\{\dot{\mathbf{r}}'\}$ es proporcional a la velocidad de la partícula en el sistema no inercial, tiende a desviar a la partícula de la dirección de movimiento. La fuerza $-m\left\{\dot{\overrightarrow{\omega}}\right\}\times\mathbf{r}'$ se llama azimutal o transversal, nótese que $\{\dot{\omega}\} = \dot{\omega}$, esta fuerza sólo existe cuando hay aceleración angular y es transversal al eje de rotación. Finalmente el término $-m\overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r})$ es la fuerza centrífuga que apunta siempre hacia fuera del eje de rotación y perpendicular a éste. La ecuación (3.20) se convierte en la ecuación de movimiento para un sistema no inercial. Conociendo la fuerza aplicada que cumple con alguna ley de fuerza en el SIR podemos establecer la correspondiente ecuación de movimiento para el SNIR. La solución de esta ecuación de movimiento proporcionará la trayectoria $\mathbf{r}'(t)$ medida en el sistema no inercial. Esta ecuación suele ser muy complicada dependiendo del movimiento relativo entre un SIR y un SNIR. Por esta razón es por la que se afirma que las leyes del movimiento toman su forma más simple en un SIR. Los efectos que causan estos términos extra, se llaman efectos inerciales.

3.2. Efectos inerciales

En esta sección ilustramos, con algunos ejemplos sencillos, los efectos inerciales. Estos efectos los podemos observar en nuestra experiencia cotidiana, por ejemplo: cuando nos movemos en un vehículo que se acelera como un autobús. En un objeto rotando como los aparatos de los parques de diversión o en cualquier sistema que no tenga movimiento rectilíneo uniforme.

Péndulo en un sistema uniformemente acelerado

Un ejemplo importante de estos efectos inerciales lo observamos en el movimiento de un péndulo simple cuando lo montamos en un sistema que se acelera en una línea recta. Supongamos un vagón de tren en un tramo recto que se acelera uniformemente, ahí colocamos un péndulo, en este caso el sistema de referencia fijo en el vagón (SNIR), no está rotando, $\overrightarrow{\omega} = 0$, de tal forma que la ecuación (3.20) se reduce a la siguiente

$$m\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = \mathbf{F} - m\mathbf{A}. \tag{3.21}$$

El único término no inercial es el debido al desplazamiento del sistema S' ver figura (3.4.). En el sistema S', la ecuación de movimiento tiene tres términos: la fuerzas aplicadas de gravedad $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$, además del término inercial $-m\mathbf{A}$; la posición de equilibrio del péndulo cambia y la ecuación de movimiento en el SNIR es:

$$m\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{A}\ . \tag{3.22}$$

Para que el péndulo permanezca en equilibrio, la fuerza total debe anularse, de tal forma que sus componentes cartesianas deben satisfacer que:

$$\begin{aligned} F_{x'} &= -mA - T\text{sen}\theta_0 = 0, \\ F_{y'} &= -mg + T\cos\theta_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

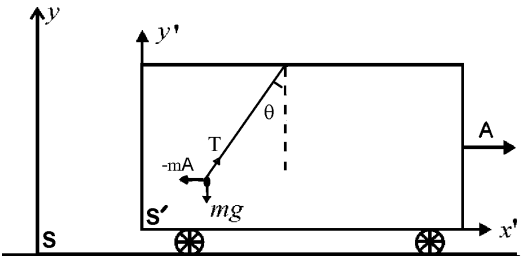

Figura 3.4. Péndulo en un SNIR. El sistema S es un sistema inercial de referencia, el sistema no inercial S' se acelera respecto del primero con aceleración lineal $\mathbf{A}$.

Estas condiciones determinan el ángulo de equilibrio,

$$\frac{\text{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} = \tan\theta_0 = -\frac{A}{g}. \tag{3.24}$$

Mientras más grande sea la aceleración A el ángulo en el que se equilibran las fuerzas es mayor, y está en la dirección contraria al movimiento.

Analicemos su movimiento cuando lo ponemos a oscilar en un plano que contiene a los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{g}$; el objeto recorrerá un arco de círculo, debido a que la cuerda no es extensible; descomponiendo las fuerzas en las direcciones tangencial y radial obtenemos que

$$\begin{aligned} F_{r'} &= mg\cos\theta + mAsen\theta - T = m\ddot{r} - m\ell\dot{\theta}^2 \\ F_{\theta'} &= -mgsen\theta - mA\cos\theta \quad\;\; = lm\ddot{\theta}\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Debido a la cuerda no hay movimiento en r ($\ddot{r} = 0$), de la segunda de estas ecuaciones obtenemos que

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}(sen\theta\cos\theta_0 - \cos\theta sen\theta_0)(\cos\theta_0)^{-1},$$

donde hemos usado el resultado (3.24), definiendo una nueva variable $\Theta = \theta - \theta_0$ la ecuación anterior se puede transformar a:

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 sen\Theta = 0, \tag{3.26}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}$. La ecuación (3.26) es nuevamente la ecuación de un péndulo simple y se reduce a la de un oscilador armónico cuando $\Theta \ll 1$, es decir, $\theta \approx \theta_0$. En este caso la solución es la siguiente:

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

la amplitud y la fase de este movimiento armónico simple dependen de las condiciones iniciales. El péndulo en el sistema no inercial S' oscila en torno a la posición de equilibrio dada por la ecuación (3.24) con frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}$, esta frecuencia depende de la aceleración del sistema S', a través del ángulo θ_0. Si $\theta_0 \to 0$ ($A \to 0$) recuperamos el movimiento del péndulo simple; por el contrario, si $\theta_0 \to -\frac{\pi}{2}$ ($A \to \infty$) la frecuencia de oscilación crece indefinidamente, el péndulo oscila muy rápidamente para grandes aceleraciones del SNIR. De esta manera, el movimiento del péndulo cambia cualitativamente. El análisis de este sistema visto desde el SIR S conduce al mismo resultado.

Ascensor acelerado

Ahora estamos en posición para estudiar los efectos que se observan en un elevador que se acelera en un campo gravitacional homogéneo, este caso se ilustra en la figura (3.5.). Para el observador en el SNIR un objeto está sujeto a la fuerza aplicada $m\mathbf{g}$ y a la fuerza de origen no inercial $-m\mathbf{A}$, de tal forma que la ecuación de movimiento (ver ecuación 3.20 con $\overrightarrow{\omega} = 0$) en este sistema es:

$$m\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = m\mathbf{g} - m\mathbf{A}.$$

De esta manera el objeto está cayendo con una aceleración efectiva en la dirección negativa del eje vertical y con valor absoluto $a = g + A$. Esta es la razón por la que nos sentimos más pesados cuando un elevador sube aceleradamente y sentimos perder peso cuando baja acelerándose. Si el ascensor cae libremente $\mathbf{A} = \mathbf{g}$, desde el SNIR observamos que la partícula siente una

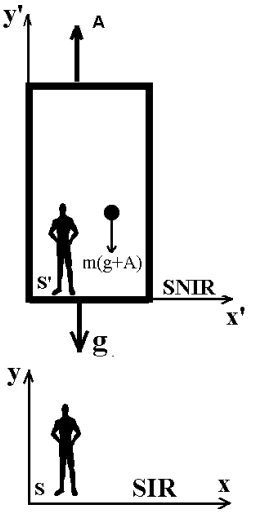

Figura 3.5. Desde el SIR S se observa a un elevador moviéndose aceleradamente en la dirección vertical.

fuerza $\mathbf{F}' = m\mathbf{g} - m\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Desde el elevador observamos que el objeto flota libremente, igualmente, el observador en este sistema no siente su propio peso y también puede flotar. Si este sistema no pudiera ver el exterior, el observador ahí aseguraría que el sistema es inercial, pues un objeto en reposo o movimiento rectilíneo uniforme conservará este movimiento a pesar de haber fuerza aplicada. Este fenómeno llevó a A. Einstein en 1916 a establecer su famoso *principio de equivalencia*: para el cual, físicamente no es posible distinguir un sistema uniformemente acelerado de un campo gravitacional homogéneo. Con este principio resulta entonces que la masa inercial y la masa gravitacional son equivalentes, iguales numéricamente (ver por ejemplo [12, 57]).

Estación espacial

Una cápsula o estación espacial de masa M_c, gira con velocidad tangencial constante describiendo un círculo en torno a la

Tierra cuya masa es M_T, supongamos que este círculo está en el plano del ecuador terrestre y consideremos a la Tierra como un sistema inercial de referencia (SIR)[1]. La cápsula está rotando con velocidad angular $\omega = v_t/(R+h)$ donde R es el radio de la Tierra y h es la altura de la órbita desde la superficie terrestre (ver figura (3.6.)). Para moverse en este círculo, la fuerza centrípeta debe ser proporcionada por la atracción gravitacional:

$$F_{centrípeta} = \frac{M_c v_t^2}{(R+h)} = G\frac{M_T M_c}{(R+h)^2}, \tag{3.27}$$

y está dirigida al centro de la Tierra; de tal forma que la velocidad angular con la que gira la cápsula está relacionada con la altura por la siguiente ecuación,

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{(R+h)^3}} \quad . \tag{3.28}$$

El sistema de coordenadas no inercial también tiene como origen el centro de la Tierra, pero rota con velocidad angular ω. Desde este sistema de referencia el observador en la cápsula está en reposo a una distancia $(R+h)$. Desde la nave (SNIR) el observador debe corregir la segunda ley de Newton de acuerdo a la ecuación (3.20); en ella, la aceleración lineal $\mathbf{A}$ es nula, la partícula no tiene movimiento lineal en el SNIR $\dot{\mathbf{r}}' = 0$ y la velocidad angular es constante $\dot{\omega} = 0$. De esta forma, desde el sistema de referencia del astronauta, sobre un objeto de masa M_c actuará la fuerza

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - M_c \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}'\right), \tag{3.29}$$

Sustituyendo en esta ecuación la aceleración centrípeta (ecuación (3.27)) y el valor de la velocidad angular (ecuación (3.28))

[1]La Tierra es sólo aproximadamente un sistema inercial de referencia, los efectos inerciales debidos a su rotación y traslación en torno all S0l son muy pequeños y pueden despreciarse.

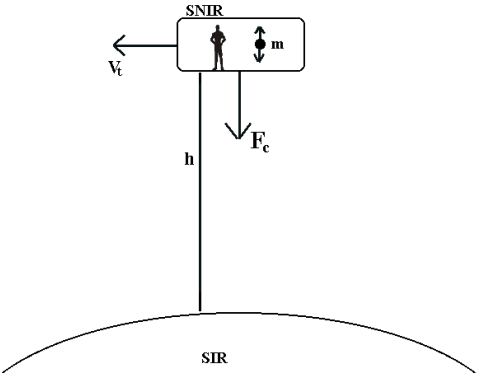

Figura 3.6. Un astronauta en la cápsula espacial describe el movimiento de los objetos corrigiendo la segunda ley de Newton por el término centrífugo.

obtenemos que:

$$\mathbf{F}' = -G\frac{M_T M_c}{(R+h)^2}\widehat{\mathbf{r}} + G\frac{M_T M_c}{(R+h)^2}\widehat{\mathbf{r}} = 0,$$
$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{centrípeta} + \mathbf{F}_{centrífuga}. \tag{3.30}$$

Esto significa que un objeto en el interior de la cápsula está en equilibrio debido a que la fuerza centrípeta (la fuerza de gravedad) iguala a la fuerza centrífuga cuyo origen es no inercial. Al igual que un elevador cayendo con aceleración g, en la cápsula espacial los objetos parecen no tener peso. Este es el famoso efecto de ingravidez que afecta a los astronautas.

Líquido en rotación

Cuando a un líquido se le obliga a rotar sobre un eje vertical con velocidad angular ω, observamos que su superficie originalmente plana cambia de forma a la de una parábola; este efecto puede ser explicado fácilmente desde el sistema inercial. Sin embargo, ahora lo podemos estudiar desde el SNIR que rota con

el líquido (ver figura (3.7.)); supondremos por simplicidad, que la viscosidad y la tensión superficial son despreciables.

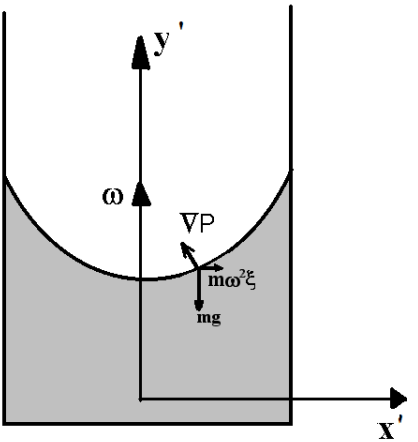

Figura 3.7. Un líquido en rotación desarrolla una superficie parabólica. El sistema de coordenadas S' rota con el fluido.

Para un observador rotando con el fluido la segunda ley de Newton para un elemento de volumen de masa dm se escribe así:

$$d\mathbf{F}' = d\mathbf{F} - dm\,\overrightarrow{\omega}\times(\overrightarrow{\omega}\times\mathbf{r}'), \tag{3.31}$$

$$d\mathbf{F}' = \mathbf{g}dm - \nabla P dV - dm\omega^2 r' sen\theta\widehat{\mathbf{u}}_r, \tag{3.32}$$

En este caso no aparece la aceleración lineal, la fuerza transversal ($\dot{\omega} = 0$), o la fuerza de Coriolis ($\dot{\mathbf{r}} = 0$); el único término de origen no inercial es la fuerza centrífuga. Sobre este elemento de volumen las fuerzas aplicadas son dos: su peso $\mathbf{g}dm$ y el gradiente de presión ∇P que está dirigido en la dirección perpendicular a la superficie del fluido, la distancia al eje de giro del elemento de volumen es $\xi = r'\text{sen}\theta$, θ es el ángulo entre r' y ω. La fuerza

centrífuga es perpendicular al eje de giro y está en la dirección del vector radial $\widehat{\mathbf{u}}$. En este sistema de referencia el fluido está en equilibrio, entonces,

$$d\mathbf{F}' = 0, \tag{3.33}$$

$$-\nabla P + \rho(\mathbf{g} - \omega^2 \xi \widehat{\mathbf{u}}) = 0. \tag{3.34}$$

ρ es la densidad del fluido. El segundo término es sólo función de la posición y por lo tanto podemos escribir una función potencial:

$$V(\xi, z) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi^2 + cte, \tag{3.35}$$

de tal forma que

$$-\nabla P - \nabla V(\xi, z) = 0. \tag{3.36}$$

La superficie del fluido está definida por el lugar geométrico de los puntos donde la presión iguala la presión atmosférica P_0 (que es una constante); de esta forma la superficie de un fluido está definida por la siguiente ecuación

$$\nabla \left(P_0 + V(\xi, z)\right) = 0, \tag{3.37}$$

sustituyendo a la función potencial y despejando a z obtenemos

$$f(z, \xi) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\xi^2 - \frac{P_0}{\rho g} - z = 0. \tag{3.38}$$

Ésta es la ecuación de una parábola, *i.e.*, la superficie del fluido tiene la forma de esta parábola Para ω nula la superficie se convierte en un plano horizontal, mientras que para ω muy grande la parábola es muy pronunciada; notamos también que la dependencia de esta superficie con la densidad del fluido es poco importante, sólo define el lugar donde se ubica el vértice.

3.3. Efectos inerciales debidos al movimiento de la Tierra

Nuestro sistema natural de observación, la Tierra, no es un sistema inercial de referencia, rota sobre su propio eje, tiene un movimiento de traslación alrededor del Sol, su eje de rotación precede alrededor de un eje fijo; además, el Sol gira en torno al centro de la galaxia que a su vez se desplaza. Sin embargo, de estos movimientos, el que causa efectos inerciales apreciables es el de rotación de la Tierra sobre su propio eje. Aunque estos efectos son en general muy pequeños, en algunas circunstancias se convierten en importantes; a continuación describimos los más notables.

Efecto de la rotación terrestre sobre la plomada

Supongamos una masa m suspendida de una cuerda de longitud constante ℓ, sobre la superficie de la Tierra y a una latitud geográfica θ_0, (figura (3.8.)). La rapidez de rotación de la Tierra es constante ($\mathbf{\Omega} = cte$) y la partícula está en reposo en el sistema rotando; de acuerdo a la ecuación (3.20) la única fuerza inercial que aparece es la centrífuga $-m\Omega\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}')$. La fuerza centrífuga tiene magnitud $m\mathbf{\Omega}^2 r\cos\theta_0$ y está dirigida hacia afuera, perpendicular al eje de rotación. Las fuerzas aplicadas son la fuerza gravitatoria que está dirigida hacia el centro de la Tierra y la tensión en la cuerda T que mantiene el equilibrio. La ecuación de movimiento es entonces,

$$m\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{\Omega}\times\left(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'\right) = 0. \tag{3.39}$$

En equilibrio $\ddot{\mathbf{r}}' = 0$, la tensión compensa a la suma de la gravedad y la fuerza centrífuga que desvía la plomada un ángulo α respecto al radio vector desde el centro de la Tierra (ver figura (3.9.)), por lo tanto

$$-\mathbf{T} = m\mathbf{g} - m\left(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'\right)\ . \tag{3.40}$$

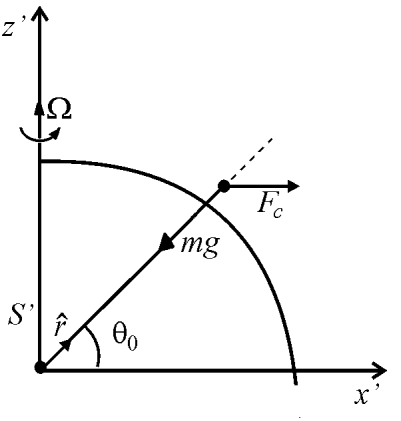

Figura 3.8. La fuerza centrífuga, debida al movimiento de rotación de la Tierra sobre su eje polar, causa que una plomada se desvíe de la dirección radial por un pequeño ángulo, debido a la fuerza centrífuga de origen no inercial.

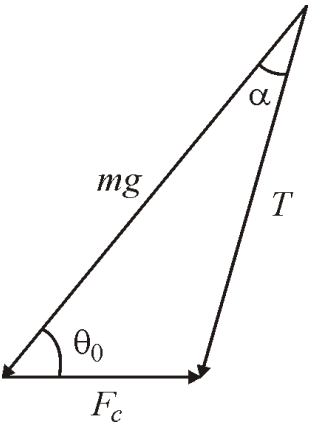

Figura 3.9. Medido desde la superficie de la Tierra, sobre una plomada actúan: la gravedad, la tensón de la cuerda y la fuerza centrífuga, el ángulo que se desvía la plomada es α medido con respecto a la dirección radial.

Aplicando la ley de los senos obtenemos que

$$\frac{\text{sen}\alpha}{m\mathbf{\Omega}^2 r\cos\theta_0} = \frac{\text{sen}\theta_0}{\mathbf{T}}\ , \tag{3.41}$$

debido a que el ángulo α es muy pequeño podemos aproximar las magnitudes, $T \approx mg$, entonces,

$$sen\ \alpha = \frac{\mathbf{\Omega}^2 r\cos\theta_0\,\text{sen}\theta_0}{g}\ , \tag{3.42}$$

este ángulo α se anula en el ecuador ($\theta_0 = 0$) y los polos ($\theta_0 = \pm 90°$). El máximo valor de sen $\theta_0 \cos\theta_0$ corresponde a $\theta_0 = 45$, los valores para los demás parámetros son: $\mathbf{\Omega} = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \times 10^{-5} s^{-1}$, $r = 6400\,km$, $g = 9{,}81 \frac{kg}{m\ s^2}$. De esta forma, el cociente entre las magnitudes la fuerza centrífuga máxima y la fuerza de gravedad es $\mathbf{\Omega}^2 r/g = 0{,}0034$, es decir la máxima magnitud de la fuerza centrífuga sobre la superficie de la Tierra es 0.3 % del valor de la gravedad. El ángulo de desviación α a esta latitud es tal que $sen\ \alpha = 1{,}7 \times 10^{-3}$, o bien, $\alpha \approx 0{,}1$ grado. Un edificio de treinta y tres pisos, de altura $\sim 100m$, se desvía con respecto a la dirección radial por $1{,}7cm$. Este ángulo define la vertical en cada latitud.

Definimos a la gravedad efectiva como la suma de la atracción gravitacional hacia el centro de la Tierra y la fuerza centrífuga debida a su rotación. Hay varios efectos que hacen que la gravedad efectiva varíe ligeramente en cada punto de la superficie del planeta: la distribución de masa de la Tierra, la forma de la Tierra que no es una esfera perfecta y la fuerza centrífuga son los más importantes.

El péndulo de Foucault

Otro efecto importante debido a la rotación de la Tierra se observa en el movimiento pendular, esta vez debido a la fuerza de Coriolis péndulo, la cuerda que sostiene al péndulo tiene longitud ℓ, la masa que cuelga es m y la tensión en la cuerda es $\mathbf{T}$; el péndulo en el instante t hace un ángulo θ con la vertical. Los ejes x', y', z' del sistema local (SNIR) se colocan así: el eje z' en

la dirección vertical y el eje y' sobre la tangente a la superficie terrestre apuntando hacia el norte, el eje x' quedará apuntando hacia el este en ese punto.

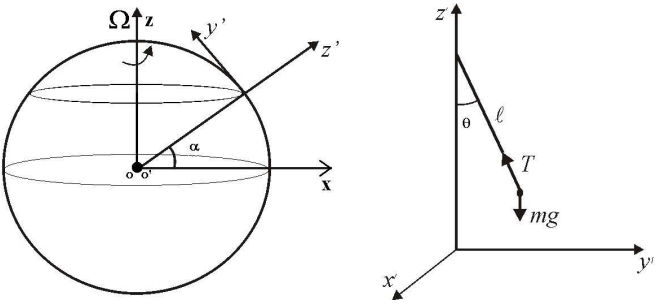

Figura 3.10. Péndulo de Foucault. Un péndulo de masa m y longitud ℓ oscila a la latitud terrestre identificada por el ángulo α. Los ejes coordenados del SNIR están fijos a la superficie terrestre siendo z' la vertical local.

Las fuerzas actuando son nuevamente la tensión y el peso; supongamos que la acción de la fuerza centrífuga ya fue tomada en cuenta al definir la dirección vertical z', en la cual el péndulo permanecería en equilibrio, de tal forma que la única fuerza de origen no inercial que debe tomarse en cuebta es la fuerza de Coriolis. Con esta selección de ejes la expresión para el vector Ω es

$$\mathbf{\Omega} = \Omega\cos\alpha\,\widehat{j}' + \Omega\,\mathrm{sen}\;\alpha\,\widehat{k}', \tag{3.43}$$

y la fuerza de Coriolis es proporcional a:

$$\mathbf{\Omega}\times\{\dot{\mathbf{r}}'\} = \left(\Omega\dot{z}'\cos\alpha\; - \Omega\dot{y}'sen\;\alpha\right)\widehat{i}' + \Omega\dot{x}'sen\,\alpha\,\widehat{j}' - \Omega\dot{x}'\cos\;\alpha\,\widehat{k}', \tag{3.44}$$

las componentes de la tensión se pueden escribir fácilmente,

$$T_{x'} = -\frac{x}{\ell}T,\;\; T_{y'} = -\frac{y}{\ell}T,\;\; T_{z'} = T\cos\theta\;, \tag{3.45}$$

donde θ es el ángulo entre la cuerda y la vertical. Las ecuaciones

de movimiento en el sistema S' quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{T}{m\ell}x - 2\Omega\left(\dot{z}\cos\alpha - \dot{y}\ sen\ \alpha\right) \\
\ddot{y} &= -\frac{T}{m\ell}y - 2\Omega\dot{x} sen\ \alpha \\
\ddot{z} &= \frac{T\cos\theta}{m\ell} - g + 2\Omega\dot{x}\cos\alpha\ ,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

por comodidad hemos quitado las primas para las variables en el sistema S'. De acuerdo a las condiciones del movimiento podemos hacer las siguientes aproximaciones: La longitud del péndulo es muy grande, de tal forma que la amplitud del péndulo es pequeña (pequeñas oscilaciones θ). La tensión en la cuerda es aproximadamente constante e igual al peso. La componente z de la fuerza de Coriolis es muy pequeña comparada con la tensión y con la gravedad. Finalmente $\dot{z}$ es despreciable. El movimiento en z es similar al de un péndulo simple, el movimiento que interesó a Foucault es el que aparece por la fuerza de Coriolis, en este caso es el movimiento en las coordenadas x y y. Con estas aproximaciones el movimiento en el plano xy está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{g}{\ell}x + 2\Omega\ sen\ \alpha\,\dot{y} \\
\ddot{y} &= -\frac{g}{\ell}y - 2\Omega\ sen\ \alpha\,\dot{x}\ .
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Definiendo $\Omega_0 = \Omega$ sen α. Transformado a nuevas variables u, v definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
x &= u\cos\Omega_0 t + v\ sen\ \Omega_0 t \\
y &= -u\ sen\ \Omega_0 t + v\cos\Omega_0 t
\end{aligned} \tag{3.48}$$

las ecuaciones (3.47) se transforman en

$$\left(\ddot{u} + \frac{g}{\ell}u\right)\cos\Omega_0 t + \left(\ddot{v} + \frac{g}{\ell}v\right) sen\ \Omega_0 t = 0\ , \tag{3.49}$$

para que esta ecuación sea válida en cualquier instante del tiempo debe cumplirse que

$$\ddot{u} + \frac{g}{\ell}u = 0$$
$$\ddot{v} + \frac{g}{\ell}v = 0 \ . \tag{3.50}$$

Las ecuaciones para u y v son idénticas a las de un oscilador armónico isótropo en 2 dimensiones ($\omega_{0x} = \omega_{0y} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$), de tal forma que en las variables u y v la trayectoria es una elipse cuyos semiejes dependen de los valores de las condiciones iniciales; el eje de la elipse en las variables u, v es estacionario (ver fig(3.11.)). Regresando a la transformación (3.48), observamos que corresponde a una rotación de ejes por el ángulo $\Omega_0 t$. Por lo tanto, el eje de la elipse fijo al sistema u, v precede a velocidad angular $\Omega_0 = \Omega \text{ sen } \alpha$ en el sistema x, y; que en este caso es el sistema fijo a la superficie de la Tierra en la latitud α. Si en el plano u, v la trayectoria es una recta, i.e., si la velocidad inicial está en el mismo plano que la fuerza aplicada, el plano del movimiento precede en el sistema x, y. El período de precesión es

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\Omega \text{ sen}\, \alpha} \tag{3.51}$$

a la latitud de la ciudad de México $\alpha = 19°$, $T_0 = 73\, hrs$ en el ecuador ($\alpha = 0$) el péndulo no precede y en el polo norte el periodo de precesión es el mínimo posible $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 24hr$. El experimento que confirmó este resultado fue realizado por J. Foucault en París en 1851 y comprobó los efectos inerciales debidos a la fuerza de Coriolis.

Movimiento de proyectiles sobre la superficie de la Tierra

Otro efecto importante de la fuerza de Coriolis se observa en el movimiento de proyectiles o en el lanzamiento de un satélite. La influencia de la fuerza de Coriolis adquiere relevancia cuando el tiempo de vuelo es grande o cuando la velocidad del objeto medida en el SNIR es grande. Consideremos la ecuación

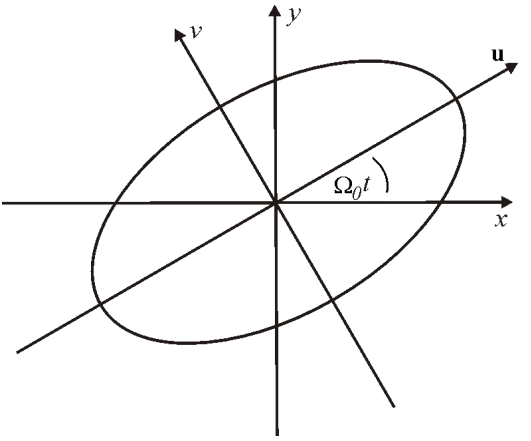

Figura 3.11. Efecto de la fuerza de Coriolis sobre un péndulo. El péndulo describe una elipse en el plano definido por los ejes (u, v), estos ejes rotan con respecto al sistema de ejes (x', y') fijos a la tierra. en la latitud θ_0.Nótese que Ω_0

de movimiento para un proyectil en la superficie de la Tierra, despreciemos la fricción con el aire y consideremos a un sistema de coordenadas como el que describimos en la figura (3.10.), el eje y' apunta hacia el norte, el eje z' corresponde a la dirección vertical en este punto y el eje x' apunta hacia el este. Desde el sistema no inercial, fijo a la superficie de la Tierra, la segunda ley de Newton toma la forma

$$m\left\{\ddot{\mathbf{r}}'\right\} = m\mathbf{g} - 2m\mathbf{\Omega} \times \left\{\dot{\mathbf{r}}'\right\} - m\mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'\right) \ . \qquad (3.52)$$

El tercer término es la fuerza centrífuga, proporcional a Ω^2, que es muy pequeña comparada con la gravedad terrestre (0.3 % de ella), por esta razón la despreciaremos. Con esta aproximación y selección de ejes, la velocidad angular se puede escribir como en la ecuación (3.43)

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \cos\theta_0 \, \widehat{j}' + \Omega \, sen \ \theta_0 \, \widehat{k}' \ , \qquad (3.53)$$

aquí θ_0 es la latitud geográfica que por ahora consideramos constante (esto es, el proyectil no viaja una gran distancia). Las

ecuaciones de movimiento (3.52) quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\Omega\dot{z}\cos\theta_0 + 2\Omega\dot{y}sen\ \theta_0 \\ \ddot{y} &= -2\Omega\,\dot{x}\,sen\ \theta_0 \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega\dot{x}\cos\theta_0\ , \end{aligned} \tag{3.54}$$

nuevamente, por comodidad, hemos suprimido las primas en las variables. Al igual que en el péndulo de Foucault estas ecuaciones están acopladas, sin embargo, la primera integral es inmediata:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\Omega\ z\cos\theta_0 + 2\Omega\ y\ sen\ \theta_0 + \dot{x}_0 \\ \dot{y} &= -2\Omega\ \ xsen\ \theta_0 + \dot{y}_0 \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega\ x\cos\theta_0 + \dot{z}_0\ , \end{aligned} \tag{3.55}$$

las constantes iniciales de la velocidad son ahora $\dot{\mathbf{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$; y que en $t = 0$ $\mathbf{r}_0 = 0$. Sustituyendo $\dot{y}$ y $\dot{z}$ en la primera de las ecuaciones (3.54) obtenemos que la posición x resulta tener la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{x} = 2\Omega gt\cos\theta_0 - 4\Omega^2 x\cos^2\theta_0 - 2\Omega\dot{z}_0\cos\theta_0 - \\ - 4\Omega^2 xsen^2\theta_0 + 2\Omega sen\theta_0\dot{y}_0, \end{aligned} \tag{3.56}$$

debido a la pequeñez de Ω, los términos en Ω^2 pueden ser despreciados cuando se comparan con los demás, quedando que

$$\ddot{x} = 2\Omega gt\cos\theta_0 - 2\Omega\dot{z}_0\cos\theta_0 + 2\Omega\dot{y}_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0\ . \tag{3.57}$$

Integrando dos veces esta expresión obtenemos

$$x\,(t) = \frac{1}{3}\Omega gt^3\cos\theta_0 - \Omega t^2\,(\dot{z}_0\cos\theta_0 - \dot{y}_0\ sen\ \theta_0) + \dot{x}_0 t\ , \tag{3.58}$$

un proceso análogo para los componentes y y z nos proporciona

$$\begin{aligned} y\,(t) &= \dot{y}_0 t - \Omega\dot{x}_0 t^2 sen\ \theta_0\ , \\ z\,(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + \Omega\dot{x}_0 t^2\cos\theta_0\ , \end{aligned} \tag{3.59}$$

nótese que x, la distancia hacia el este, tiene una dependencia cúbica en el tiempo mientras que y tiene dependencia cuadrática, de tal forma que el efecto de la fuerza de Coriolis será más importante mientras mayor sea el tiempo que viaje la partícula y mayor sea la velocidad inicial, es decir, los desplazamientos por efecto de la fuerza inercial en la dirección este (x) y en la dirección norte (y) serán notables para tiempos grandes y velocidad inicial grande, esto sucede para proyectiles y lanzamientos de satélites.

Como ejemplo numérico consideremos un proyectil lanzado hacia el norte con velocidad inicial $v_0 = 750\ m/s$ (supersónico), a una latitud norte $\theta_0 = 45°$ con un ángulo de lanzamiento $\alpha = 45°$. Con estas condiciones en las ecuaciones (3.58) y (3.59) contienen los siguientes parámetros: $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha$, $\dot{z}_0 = v_0 \text{ sen } \alpha$, $\Omega = \frac{2\pi}{dia} = 7{,}27 \times 10^{-5} s^{-1}$, $\alpha = \theta_0 = 45°$. El tiempo de vuelo lo obtenemos de $(z\,(t_f)) = 0$, $t_f = 2v_0\ (\text{sen } \alpha)/g = 70{,}75\ s$, resultando que

$$\begin{aligned} x\,(t_f) &= \frac{8}{3}\Omega g \cos\theta_0 \frac{v_0^3\ sen^3\alpha}{g^3} - \Omega \left(\frac{2v_0\ sen\ \alpha}{g}\right)^2 \cdot \\ &\quad [v_0\ sen\ \alpha \cos\theta_0 - v_0 \cos\alpha\ sen\ \theta_0] \\ y\,(t_f) &= \frac{2v_0^2}{g}\ sen\ \alpha \cos\alpha \\ z\,(t_f) &= 0\ , \end{aligned} \tag{3.60}$$

simplificando x obtenemos

$$x\,(t_f) = \frac{8}{3}\frac{\Omega v_0^3}{g^2}\ sen^3\alpha \cos\theta_0\ ,$$

Como ejemplo consideremos $\alpha = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$con lo que obtenemos numéricamente el tiempo de vuelo t_f y,

$$\begin{aligned} x\,(t_f) &= 210{,}4\ m \\ y\,(t_f) &= 57{,}3\ Km. \end{aligned}$$

El proyectil fue disparado en la dirección norte; sin embargo, la fuerza de Coriolis hace que se desvíe hacia el este y lo hace

proporcionalmente al cubo del tiempo de vuelo (o proporcionalmente al cubo de la velocidad inicial). En este caso el alcance es muy grande porque no consideramos la fricción con el aire que disminuye mucho este valor (ver la ecuación (2.65) y la figura (2.10.)).

Movimientos ciclónicos

Otro efecto importante de la fuerza de Coriolis se observa en grandes masas de aire en movimiento, huracanes y tornados. En este caso el efecto de la fuerza de Coriolis se vuelve apreciable debido a que las masas de aire permanecen en movimiento por grandes intervalos de tiempo.

Si no consideramos la fuerza de Coriolis el flujo de aire (o vapor de agua) seguiría la dirección del gradiente de presión, de mayor a menor presión; es decir, la velocidad de viento sería perpendicular a las líneas isobaras. La fuerza de Coriolis desvía a las masas de aire, en este caso hacia la derecha (ver figura (3.12.)). Si los patrones de vientos son estacionarios la velocidad no cambia y no hay aceleración, la fuerza aplicada (en este caso el gradiente de presión) debe igualar a la fuerza de Coriolis y por lo tanto la trayectoria del viento es paralela a las líneas isobaras.

Si las isobaras son curvas cerradas y cercanamente concéntricas se forma un patrón de vientos ciclónicos, en el hemisferio norte circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj y en sentido contrario en el hemisferio sur (figura (3.13.)).

Esta circulación de vapor de agua se destruye por la existencia de la fricción, viscosidad del fluido y fricción con el mar; las trayectorias del viento ya no son paralelas a las isobaras y el sistema alcanza un nuevo equilibrio. Sin embargo, si la distribución de calor del mar mantiene permanentemente este arreglo de isobaras, el ojo ciclónico se mantiene y puede aumentar formando un gran ciclón (en el Atlántico se les llama huracanes y en el Pacífico tifones) que se desplaza dependiendo de la forma de las isobaras y de los gradientes de temperatura. Los vientos paralelos a la superficie pueden alcanzar grandes velocidades y

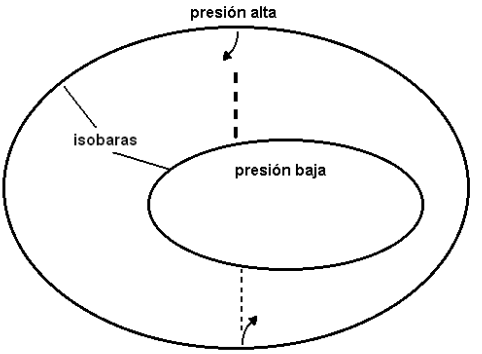

Figura 3.12. En el hemisferio norte, una masa de aire moviéndose hacia el norte es desviada por la fuerza de Coriolis hacia el este. La masa de aire moviéndose hacia el sur será desviada hacia el oeste.

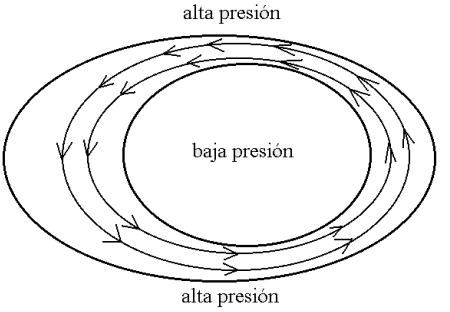

Figura 3.13. En condiciones estacionarias el viento ciclónico sigue trayectorias paralelas a las líneas isobaras.

el tamaño del huracán puede ser inmenso. El huracán puede ser destruido cuando cesa el foco caliente o cuando choca con el continente y la fricción disipa toda la energía cinética del vapor de agua.

3.4. Ejercicios

1. Un disco horizontal rota sobre su eje con velocidad angular Ω constante. Sobre el disco se fija una barra guiando a un resorte que sujeta a una cuenta de masa m tal como se muestra en la figura (3.14.), entre la partícula y la barra no hay fricción y la constante del resorte es k. Obtenga y resuelva la ecuación de movimiento para esta partícula. Observe que la fuerza de Coriolis está balanceada por una fuerza de reacción de la barra.

2. Un péndulo, que oscila en un plano vertical, se coloca en un ascensor que sube (baja) con aceleración constante a; obtenga la ecuación de movimiento para este péndulo y resuelva para el caso de oscilaciones pequeñas. ¿Con qué frecuencia oscila este sistema? ¿Qué sucede si la aceleración a está dirigida hacia abajo y es mayor que la del campo gravitacional?

3. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra debe girar un satélite para ser estacionario? ¿Por qué es conveniente colocarlo sobre el ecuador terrestre?

4. ¿Con qué aceleración debe bajar un ascensor para que una persona en su interior sienta perder la mitad de su peso?

5. Explique la razón por la que un cubo de agua puede ponerse a rotar verticalmente sin que se derrame el agua, ¿cuál es la velocidad angular de rotación mínima para que no derrame líquido?

6. Un péndulo en el polo norte se pone a oscilar en un plano vertical, ¿Cuál es su periodo de precesión?, ¿Cuál si está en el ecuador? Explique.

7. Un oscilador armónico bidimensional se instala en un vagón que se acelera linealmente respecto a un sistema inercial fijo en la superficie de la Tierra, considerada como un

sistema inercial. ¿Qué cambios sufre la dinámica del oscilador? i.e. ¿cómo cambia su periodo, su amplitud y la forma de su trayectoria?.

8. Suponga un planeta esférico con la misma velocidad angular que la Tierra, con su masa homogéneamente distribuida, cuya gravedad es $g = 0{,}1g_T$ y de radio $R = 10R_T$ g_T y R_T son la aceleración de la gravedad y el radio de la tierra respectivamente. Haga una gráfica que muestre la variación de la dirección vertical definida por la plomada, como función de la latitud.

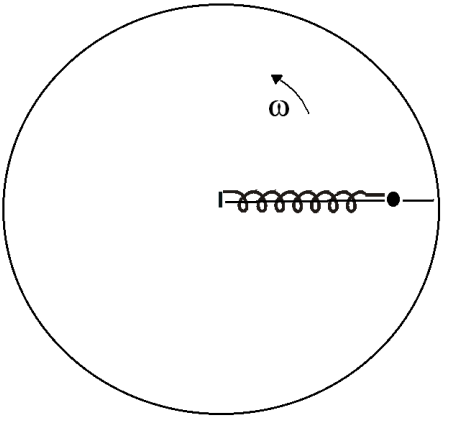

Figura 3.14. Disco rotando en el plano horizontal con velocidad angular constante, la barra que guía al resorte está fija al plano.

4

TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

En este capítulo generalizamos las leyes del movimiento y las aplicamos a un conjunto de partículas para obtener sus ecuaciones dinámicas. Obtenemos los teoremas generales de conservación para el momento lineal, el momento angular y la energía. Incluimos el teorema del virial, que siendo un teorema de tipo estadístico resulta de gran utilidad en una variedad de sistemas mecánicos. Introducimos el concepto de integral de movimiento. Ejemplificamos estos conceptos resolviendo el caso del oscilador armónico isótropo en tres dimensiones, dos partículas interaccionando por una fuerza proporcional al desplazamiento y dirigida a lo largo de la línea que une a las partículas; este sistema constituye el llamado problema del campo central, en el cual se conocen las constantes de movimiento necesarias; con ellas reducimos el problema al de un problema equivalente de una partícula en una dimensión, que se puede resolver en términos de funciones elementales, *i.e.*, resolvemos a una cuadratura. Algunas de las referencias recomendadas para este tema son: [1, 2, 3, 7, 12, 14, 16, 17].

4.1. Dinámica de una partícula

El estudio de la dinámica de una partícula se reduce a conocer la fuerza o el conjunto de fuerzas que actúan sobre ella, lo cual se logra estableciendo la ley de fuerzas en cada caso particular

tal como lo describimos en el capítulo 2. Al hacer esto se obtiene una ecuación de movimiento, una relación dinámica; dicha ecuación es una ecuación vectorial diferencial de segundo orden, la solución de esta ecuación requiere de especificar las condiciones iniciales $\mathbf{r}\,(t = t_1)$ y $\mathbf{r}\,(t = t_2)$, (las condiciones iniciales también se pueden especificar por medio de $\mathbf{r}\,(t = t_0)$ y $\mathbf{v}\,(t = t_0)$). La solución a esta ecuación diferencial es la descripción del movimiento, representada por su trayectoria en forma paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$, donde t, el tiempo, es el parámetro libre.

La solución analítica de las ecuación de movimiento no siempre es posible; sin embargo, cuando esto es posible la solución de esta ecuación diferencial puede llevarse a cabo más fácilmente si se conoce una primera integral, es decir, una función de las variables del sistema que reduce el orden de la ecuación diferencial. Esta primera integral o integral de movimiento usualmente está relacionada con un teorema de conservación; los teoremas de conservación más generales son: el del momento lineal, el del momento angular y de la energía; los cuales describiremos a continuación.

Momento lineal

Consideremos el caso especial de una partícula en un SIR, en donde la segunda ley de Newton toma la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0\,, \tag{4.1}$$

i.e., no hay fuerza aplicada, tendremos entonces que $\mathbf{p}$ es constante en el tiempo, lo cual puede expresarse como un teorema de conservación:

Si sobre una partícula no actúa fuerza alguna, el vector de momento lineal, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ *es una constante en el tiempo.*

Este teorema reduce inmediatamente el orden de la ecuación diferencial al primer orden,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = cte \tag{4.2}$$

cuya solución es inmediata,

$$\mathbf{r} = \mathbf{v_0}t + \mathbf{r}_0, \tag{4.3}$$

en este caso las condiciones iniciales determinan a $\mathbf{v_0}$ y $\mathbf{r}_0$. Este problema está resuelto gracias a una constante de movimiento, el momento lineal de la partícula. La partícula se mueve en la trayectoria más simple posible, en un movimiento rectilíneo uniforme.

Momento angular

Definamos el momento angular[1] alrededor del origen $\mathbf{0}$, como sigue

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{4.4}$$

donde $\mathbf{r}$ se mide desde el origen $\mathbf{0}$. Derivando esta ecuación con respecto del tiempo

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$
$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.5}$$

al producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ se se llama el momento de la fuerza (torque) en torno de $\mathbf{0}$ y se denota por $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{4.6}$$

El correspondiente teorema para la conservación del momento angular es:

Si no existe torque sobre la partícula, el momento angular es una constante de movimiento.

$$\dot{\mathbf{L}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{L} = \mathbf{cte}. \tag{4.7}$$

Para el caso de una partícula donde el momento angular se conserva, implica inmediatamente que: El movimiento se realiza

[1] También es usual llamarlo momento cinético.

en un plano debido a que tanto la posición **r** como el momento **p** deben ser perpendiculares al vector constante **L**, dicho plano contiene a los vectores **r** y **p**, disminuyendo el problema de tres a dos dimensiones; además, la magnitud también es constante de tal forma que escribiendo la magnitud del momento angular en las coordenadas polares del plano donde se mueve la partícula,

$$L = mr^2\dot{\theta} = cte, \tag{4.8}$$

lo que nos permitiría escribir a la velocidad $\dot{\theta}$ en términos de r,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{cte}{mr^2}. \tag{4.9}$$

Este teorema de conservación permite eliminar un grado de libertad pasando el problema a un plano y posteriormente eliminar al movimiento angular por medio de la ecuación (4.9).

Debemos notar que la conservación del momento angular produce tres integrales de movimiento, $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$; sin embargo, usualmente la conservación del momento angular está relacionada con una fuerza dirigida a lo largo del radio vector, el sistema de coordenadas apropiado para este problema es el esférico o polar. En este caso, las componentes cartesianas del momento angular resultan poco útiles (ver ejemplo al final del capítulo y el capítulo 6).

Trabajo y energía

Consideremos ahora el trabajo hecho sobre la partícula por la fuerza aplicada **F**, al pasar de la configuración 1 a la 2. Por configuración entenderemos el estado del sistema, caracterizado por su vector de posición y su velocidad (**r** y **v**) en el tiempo $t = t_1$, así la configuración 1 será $\mathbf{r}\,(t_1)\,, \mathbf{v}(t_1)$. El trabajo hecho por la fuerza se define por:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}\ , \tag{4.10}$$

el elemento de arco sobre la trayectoria se denota por $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$, para el caso de una partícula, $(m = cte)$, el trabajo W_{12} se convierte en:

$$W_{12} = m\int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{s} = m\int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot \mathbf{v}dt = m\int_1^2 \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} =$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2\right), \tag{4.11}$$
$$W_{12} = T_2 - T_1, \tag{4.12}$$

donde $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ es la energía cinética de la partícula. Esta última relación expresa el llamado teorema trabajo-energía:

El trabajo hecho por la fuerza entre las configuraciones 1 y 2 del sistema (partícula) es el cambio de la energía cinética del sistema entre esas configuraciones.

Ahora, consideremos el caso particular en el cual el trabajo no depende de la trayectoria entre los puntos 1 y 2, es decir:

$$\int_{\substack{1\\C_1}}^{2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\substack{1\\C_2}}^{2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}, \tag{4.13}$$

del punto 1 al punto 2 se recorre la trayectoria C_1 o por la trayectoria C_2. Aplicando el teorema de Stokes a la trayectoria cerrada C_1 más la trayectoria C_2 recorrida en el sentido contrario, obtenemos que la fuerza cumple con:

$$\int_{\substack{1\\C_1}}^{2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{\substack{2\\C_2}}^{1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0, \tag{4.14}$$
$$\nabla\times\mathbf{F} = 0, \tag{4.15}$$

en estas condiciones se puede escribir: $\mathbf{F} = -\nabla V(x, y, z)$, siendo V la función escalar, llamada función o energía potencial, la cual está definida hasta una constante aditiva. En estas condiciones decimos que el campo de fuerza $\mathbf{F}$ es conservativo. Con esta condición, el trabajo resulta ser:

$$W_{12} = V_1 - V_2 \ , \tag{4.16}$$

y sustituyendo en la ecuación (4.12) obtenemos que,

$$T_2 - T_1 = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} \ = V_1 - V_2 \ . \tag{4.17}$$

Podemos introducir a una constante llamada la energía mecánica total E, de tal forma que para cualquier par de configuraciones (dos puntos cualesquiera sobre la trayectoria de la partícula) del sistema se cumple que

$$E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \tag{4.18}$$

Esta expresión constituye el teorema de conservación de la energía mecánica total:

Si la fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa, la energía mecánica total $E = T + V$ es una constante de movimiento .

Esto quiere decir que la suma de las energías cinética y potencial se conserva a lo largo de todo el movimiento de la partícula, siempre que el campo de fuerzas sea conservativo.

Bajo ciertas condiciones suele suceder que la energía así como el momento lineal y el momento angular son constantes de movimiento, es decir, son funciones dinámicas del tipo de la ecuación (4.80) (ver la sección 4.4),

$$E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + V(x, y, z,) = cte.$$

Esta función puede ser usada para eliminar una variable o disminuir el grado la ecuación diferencial correspondiente. Todos estos teoremas de conservación resultan muy útiles para resolver las ecuaciones de movimiento, pues constituyen una primera integral para las ecuaciones diferenciales.

4.2. Dinámica de un sistema de partículas

La generalización para un sistema mecánico constituido por un conjunto de partículas puntuales se hace fácilmente gracias al principio de superposición y el principio 2 (tercera ley de Newton). Para dos partículas puntuales aisladas que interaccionan entre sí, podemos escribir,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0, \tag{4.19}$$

y que de acuerdo a la definición de fuerza tendremos:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0, \tag{4.20}$$

mediante los índices 1 y 2 hacemos explícito que la fuerza sobre la partícula 1 es debida a la 2 ($\mathbf{F}_{12}$) y análogamente, que la fuerza sobre la partícula 2 es debida a la 1 ($\mathbf{F}_{21}$). Para la mayoría de los sistemas mecánicos las fuerzas de acción y reacción son paralelas a la línea que une a las partículas, ésta es la llamada condición fuerte de la ley de acción y reacción. Sin embargo, las fuerzas electromagnéticas suelen presentar condiciones donde se cumple que la fuerza de acción y reacción son iguales y de sentido contrario, pero no están a lo largo de la línea que une a las partículas, un ejemplo de sto son las interacciones electromagnéticas. Este tipo de interacciones requieren de un tratamiento especial [2].

Momento lineal

Para el caso de un sistema de n partículas puntuales, es necesario generalizar la ecuación de movimiento (segunda ley de Newton), esto lo podemos hacer mediante el principio de superposición para cada partícula[3]:

[2] Para mayores detalles puede consultarse las refs.[12, 16, 17, 39, 41]

[3] En un SIR $\mathbf{F}_i^{total}$ es la fuerza total aplicada, si el sistema de referencia es un SNIR $\mathbf{F}_i^{total}$ debe contener tanto a las fuerzas aplicadas como a las fuerzas inerciales.

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{total} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j\neq i}^{n} \mathbf{F}_{ij}, \qquad i,j = 1,2,...n, \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza que ejerce la partícula j sobre la i, la llamada fuerza de interacción, mientras que $\mathbf{F}_i^{(e)}$ es la fuerza externa al sistema de n partículas y $\dot{\mathbf{p}}_i$ es el cambio en el tiempo del momento lineal de la partícula i.

En este punto es conveniente introducir el concepto de centro de masa (CM); éste no es necesariamente un punto material ni necesariamente está en el interior del sistema de partículas. Este concepto resulta de gran utilidad para describir a los sistemas mecánicos y para establecer algunos teoremas de conservación, *i.e.*, desde el sistema de coordenadas fijo al CM algunas cantidades dinámicas se simplifican. A este punto se le asocia la masa del sistema; la localización en el espacio del centro de masa es el promedio pesado por las masas de las partículas, normalizado por la masa total, esto es:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (4.22)$$

donde $\mathbf{R}$ es la posición del centro de masa y $\mathbf{r}_i$ es la posición de cada una de las partículas que conforman el sistema, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total del sistema de partículas. De esta forma, la evolución temporal del punto llamado CM resulta ser:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (4.23)$$

o bien

$$M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \ , \quad (4.24)$$

$\mathbf{P}$ o $\mathbf{P}_{CM}$ es el momento lineal total o del CM; la ecuación de movimiento, para el CM se obtiene fácilmente por derivación y usando la ecuación (4.21),

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j\neq i}^{n}\mathbf{F}_{ij}. \tag{4.25}$$

El último término de esta expresión es cero, pues $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$; la suma de todas las fuerzas de interacción es nula aún cuando no cumplan la forma fuerte de la tercera ley de Newton; la ecuación de movimiento para el CM queda como sigue:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{total}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{(e)}. \tag{4.26}$$

De esta última ecuación obtenemos el primer teorema de conservación llamado el teorema de conservación del momento lineal total:

Si la fuerza externa total sobre el sistema es nula, el momento lineal del sistema es una constante en el tiempo conservación del momento lineal.

Es la primera integral de movimiento para un sistema mecánico de n partículas y tiene la misma utilidad que los teoremas de conservación de una partícula.

Momento angular

La generalización de la definición del momento angular para el caso de un sistema de partículas es:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \tag{4.27}$$

de tal forma que la evolución temporal de esta cantidad resulta como sigue:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i, \tag{4.28}$$

el primer término es nulo, $\dot{\mathbf{r}}_i$ y $\mathbf{p}_i$ son dos vectores paralelos, además, el segundo término $\dot{\mathbf{p}}_i$ es la fuerza sobre la partícula i. Sustituyendo la ecuación (4.21) en la última relación tenemos que:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j\neq i}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} \ , \tag{4.29}$$

en la última suma podemos agrupar los términos $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}$ y $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}$ como sigue, $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}$. Suponiendo que la fuerza entre pares está a lo largo de la línea que une las partículas, *i.e.*, que $\mathbf{F}_{ji}$ es paralelo a $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ resulta que la suma de todos estos productos también es nulo. De tal forma que:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i^{(e)} = \mathbf{N}_{total}^{(e)}. \tag{4.30}$$

De esta última expresión obtenemos el correspondiente teorema de conservación para el momento angular:

Si el momento de la fuerza externa total es cero y las fuerzas de interacción están a lo largo de la línea que une a las partículas, el momento angular total del sistema es una constante.

Un buen ejemplo de la invalidez de este teorema es el caso electromagnético, esto es, aquél en donde intervienen partículas cargadas en movimiento; la fuerza electromagnética en general no está a lo largo de la línea que une a las partículas, en este caso es conveniente establecer el teorema en términos de la suma del momento angular mecánico más el momento angular del campo electromagnético [12, 39, 40, 41].

Para un sistema de partículas, es útil escribir al momento angular en términos del momento angular del CM y el momento angular relativo al centro de masa, para esto consideremos la transformación (ver figura (4.1.)):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i^{'}, \tag{4.31}$$

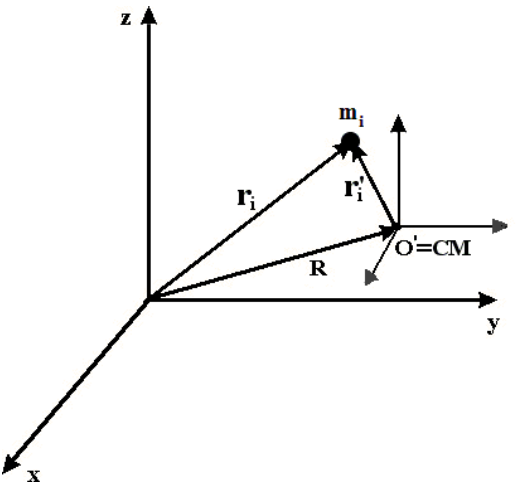

Figura 4.1. Transformación del sistema fijo en el espacio (SIR) al sistema de CM.

donde $\mathbf{r}_i^{'}$ es medido desde el CM. Después de algunas operaciones algebraicas obtenemos una expresión para el momento angular:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i^{'} \times \mathbf{p}_i^{'} \tag{4.32}$$

que podemos arreglar como sigue:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \overrightarrow{\ell} \ , \tag{4.33}$$

donde $\mathbf{L}_{CM}$ es el momento angular del centro de masa medido desde el origen **O** mientras que ℓ es el momento angular total medido desde el centro de masa. Recordemos que si hay fuerza externa el CM no es un sistema inercial. Una aplicación interesante de este teorema es el caso de una galaxia; este sistema mecánico está formado por varios millones de estrellas, que consideramos como partículas puntuales. Supongamos que el resto de objetos celestes están muy alejados, de tal forma que la única interacción es la atracción gravitacional entre cada par

de partículas en el interior de la galaxia. La ecuación (4.26) nos permite garantizar que el CM de la galaxia tiene momento lineal constante pues no hay fuerza externa al sistema, el CM se mueve a velocidad constante. Mientras que la ecuación (4.30) permite asegurar que el momento angular de la galaxia es también una constante debido a que todas las fuerzas por pares de partículas produce un torque nulo y finalmente la ecuación (4.32) asegura que el momento angular relativo es también una constante del movimiento. Las condiciones iniciales son tales que la galaxia está rotando, y su momento angular se conserva; si el radio de la galaxia se contrae, por alguna razón dinámica, la galaxia rotará más rápido, y viceversa, si el radio de la galaxia se expande rotará más lentamente. Este efecto es equivalente al de una patinadora que inicialmente está girando con los brazos extendidos y que recoge sus extremidades hacia el eje de giro, por conservación del momento angular la patinadora girará más rápido y disminuirá su rotación extendiendo los brazos nuevamente.

Trabajo y energía

Consideremos ahora el trabajo entre dos configuraciones del sistema de partículas: definimos a la configuración 1 por todas las posiciones y velocidades de las partículas en el tiempo t_1 de la trayectoria, análogamente para la configuración 2. El trabajo será entonces,

$$W_{12} = \int_1^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i,j\neq i}^{n} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i \quad (4.34)$$

donde $d\mathbf{s}_i$ es el elemento de arco de la trayectoria de la partícula i. Sustituyendo la definición de fuerza $\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i$ en esta última expresión tendremos que:

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2\right) = T_2 - T_1 \quad (4.35)$$

donde hemos usado la definición para la energía cinética del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2. \tag{4.36}$$

La expresión (4.35) establece el teorema trabajo energía para un sistema de n partículas,

El trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al sistema de n partículas entre dos configuraciones arbitrarias es igual al cambio en la energía cinética del sistema entre las mismas configuraciones.

Podemos también usar el sistema de coordenadas del CM, donde $\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v}_i^{'}$, $\mathbf{V}_{CM}$ es la velocidad del CM medida desde el sistema fijo en el laboratorio y $\mathbf{v}_i^{'}$ es la velocidad de la partícula i, medida desde el CM. Entonces podemos escribir que

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{'\,2}. \tag{4.37}$$

En esta expresión usamos el hecho de que la velocidad del CM medida desde el CM es cero. Resultando que la energía cinética medida desde el origen $\mathbf{O}$, es la suma de la energía cinética del CM y la energía cinética medida desde el CM.

En el caso en que las fuerzas externas sean conservativas, podemos escribirlas como el gradiente de una función potencial de la siguiente forma,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_{i=1}^{n} (V_i(2) - V_i(1)) \,, \tag{4.38}$$

donde el índice i, significa que las derivadas parciales en ∇_i, son respecto de los componentes de $\mathbf{r}_i$. Además, consideremos que las fuerzas de interacción $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ que satisfacen la tercera

ley de Newton, están dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas y son conservativas; entonces, pueden ser escritas como el gradiente de una función potencial; dicha función sólo puede ser función de la distancia entre partículas[4], esto es:

$$V_{ij} = V_{ij}\left(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|\right) \tag{4.39}$$

de tal manera que:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ji} = -\mathbf{F}_{ji} \tag{4.40}$$

y el término $\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i + \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j$ puede escribirse como suma de los pares i, j de la siguiente forma:

$$\int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j = -\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \\ + \nabla_j V_{ji} \cdot d\mathbf{s}_j)\,, \tag{4.41}$$

donde $$\nabla_i V_{ij} = -\nabla_j V_{ji}. \tag{4.42}$$

Debido a que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$ entonces $d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_{ij}$; para el par i, j puede escribirse:

$$\int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = V_{ij}|_1^2 \quad , \tag{4.43}$$

el símbolo ∇_{ij} significa que las derivadas en este operador son con respecto a las coordenadas de $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Con estas condiciones, el trabajo total de las fuerzas de interacción es:

[4]Para mostrar esto requerimos primero que $\nabla_i V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = \phi(r_i, r_j)\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, i.e., la fuerza está a lo largo de la línea que une a las partículas; además, sabemos que $\nabla_i V_{ij} = -\nabla_j V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij}$ con ∇_{ij} el correspondiente operador, para $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, encontramos que ϕ es una función simétrica en los índices i, j. Por último, cambiando de variable $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i^{'}$, $\mathbf{r}_{ij} = \alpha \mathbf{r}_i^{'}$ y sustituyendo en $\nabla_i V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = \mathbf{r}_{ij}\phi\,(r_{ij})$, encontramos que el argumento de ϕ sólo puede ser $|\mathbf{r}_{ij}|$.

$$\sum_{i,j\neq i}^{n}\int_1^2 \mathbf{F}_{ji}\cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_{i<j}^{n}(V_{ij}(2)-V_{ij}(1)) = \\ = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}(V_{ij}(2)-V_{ij}(1))\,. \qquad (4.44)$$

Nótese que los índices en la doble suma evitan contar dos veces a la interacción entre pares. Finalmente, sustituyendo esta expresión para el trabajo en la ecuación (4.35), obtenemos el teorema de conservación de la energía mecánica :

Si en un sistema de partículas, las fuerzas internas y externas son derivables de una función potencial (fuerzas conservativas), la cantidad

$$E = T + \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i<j}^{n} V_{ij} = T + \sum_{i=1}^{n} V_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}^{n} V_{ij} \qquad (4.45)$$

es una constante de movimiento.

Esto es, la energía vale lo mismo para cualquier configuración del sistema, o en cualquier instante del tiempo [5].

4.3. Teorema del virial

Un teorema muy útil en el análisis de varios sistemas físicos es el teorema del virial; este teorema es de naturaleza diferente al resto de teoremas de este capítulo, se refiere a los promedios

[5]Nótese que aquí requerimos que las fuerzas de interacción estén a lo largo de la línea que une a las partículas. En el caso de fuerzas electromagnéticas es necesario definir un potencial generalizado y a la energía se le define de otra forma. Para este tema véase los capítulos 5 y 9.

temporales de una función dinámica llamada el virial. Consideremos un sistema de n partículas puntuales y definamos una función dinámica:

$$u(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_i, \tag{4.46}$$

donde $\mathbf{r}_i$ **y** $\mathbf{p}_i$ son la posición y el momento lineal de cada partícula del sistema mecánico. Como es usual, nos interesa conocer la evolución temporal de esta cantidad,

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \ \dot{\mathbf{p}}_i. \tag{4.47}$$

Esta expresión se puede transformar mediante la segunda ley de Newton en

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \ \mathbf{F}_i^{total}, \tag{4.48}$$

que a su vez se puede arreglar como sigue:

$$\frac{du}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \ \mathbf{F}_i^{total}. \tag{4.49}$$

Calculando el promedio temporal de esta cantidad en un intervalo de tiempo t_0 obtenemos,

$$\frac{1}{t_0}\int_{t=0}^{t_0} \frac{du}{dt}dt = \overline{2T} + \overline{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \ \mathbf{F}_i^{total}}\ , \tag{4.50}$$

la barra arriba de cada término significa el promedio temporal en el intervalo t_0. Esta última expresión se puede reducir a

$$\frac{1}{t_0}(u(t_0) - u(0)) = \overline{2T} + \overline{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \ \mathbf{F}_i^{total}}\ , \tag{4.51}$$

al segundo miembro del lado derecho se le llama el virial [6].

En esta fórmula resultan de interés dos casos: a) Primero, supongamos que el sistema es periódico con periodo τ, entonces escogemos $t_0 = \tau$, esto significa que todas las posiciones y todos los momentos se repiten después del tiempo t_0, el lado izquierdo de la ecuación (4.51) es nulo. b) Segundo, si el sistema es tal que todas las posiciones y momentos permanecen finitos, podemos tomar t_0 lo suficientemente grande de tal forma que el término del lado izquierdo se puede hacer tan pequeño como se desee. En ambos casos tendremos que

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^{total}} \ . \tag{4.52}$$

El promedio temporal de la energía cinética es el negativo de la mitad del promedio temporal del virial. Esta ecuación se conoce con el nombre del *teorema del virial*. Nótese que las cantidades de interés en este teorema son promedios temporales. De este teorema se desprenden resultados importantes en la termodinámica, la teoría cinética de gases, la física estadística, etc.

Para el caso de sistemas mecánicos y donde las fuerzas son derivables de una función potencial (conservativas), el teorema toma la forma:

$$\overline{T} = \overline{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V}. \tag{4.53}$$

Si además se trata de una partícula y la fuerza es central

$$-\nabla V = f(r)\widehat{\mathbf{r}}, \tag{4.54}$$

esto es, la fuerza está a lo largo del vector de posición, la ecuación (4.53) se puede escribir como sigue:

$$\overline{T} = \overline{\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial r} r} \ . \tag{4.55}$$

[6] Virial significa: vigor, fuerte. A este teorema también se le conoce como el virial de Clausius.

Supongamos también que el potencial se puede escribir como una potencia de la posición r, *i.e.*, $V(r) = \alpha r^{N+1}$, de esta forma resulta que

$$\overline{T} = \frac{N+1}{2}\overline{V} \quad . \tag{4.56}$$

El promedio temporal de la energía cinética es proporcional al promedio temporal de la energía potencial.
Dos casos de interés particular son:

a) $N = 1$ (el oscilador armónico en tres dimensiones $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$), en este caso $V(r) = \alpha r^2$ y el teorema del virial queda así:

$$\overline{T} = \overline{V} \ , \tag{4.57}$$

lo cual es muy fácil de comprobar por cálculo directo.

b) $N = -2$, el potencial gravitacional o el potencial coulombiano $\mathbf{F} = \frac{\alpha}{r^2}\widehat{\mathbf{u}}_r$, aquí, el teorema conduce a que:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}. \tag{4.58}$$

Debemos tener en mente que este teorema se refiere a promedios temporales de las cantidades dinámicas, el teorema es útil para analizar propiedades globales, más no es útil para resolver el problema de la trayectoria u obtener propiedades locales.

Ejemplo. Consideremos un oscilador armónico en una dimensión con masa m y constante de restitución k y las condiciones iniciales $x(t=0) = x_0$ y $\dot{x}(t=0) = 0$. En el capítulo 2 probamos que la solución es

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \tag{4.59}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La velocidad de la partícula como función del tiempo es:

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \ sen \ (\omega_0 t), \tag{4.60}$$

para los promedio temporales de la energía cinética y potencial obtenemos:

$$\overline{T} = \frac{1}{t_0} \int_{t=0}^{t=t_0} \frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2 \ sen^2 \ (\omega_0 t) dt,$$

$$\overline{V} = \frac{1}{t_0} \int_{t=0}^{t=t_0} \frac{m}{2} x_0^2 \ \omega_0^2 \cos^2 \ (\omega_0 t) dt, \tag{4.61}$$

donde hemos sustituido el valor de $k = m\omega_0^2$ en la última ecuación. De esta forma obtenemos que los promedios temporales en un periodo $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ son:

$$\overline{T} = \overline{V}, \tag{4.62}$$

de acuerdo al teorema del virial. Esto lo podemos interpretar así: integradas en un ciclo la energía cinética iguala a la energía potencial. Por la forma en que se escriben tanto la energía cinética como la energía potencial, observamos que ambas oscilan desde cero hasta un valor máximo $\frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2$ y su suma permanece constante, cuando la energía cinética es máxima la energía potencial es mínima y viceversa, haciendo que sus promedios temporales sean iguales.

4.4. Integrales del movimiento

Las ecuaciones del movimiento son ecuaciones diferenciales para las coordenadas que pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\ddot{x}_i = \phi_i(x_1, x_2, ..., x_f, \ \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_f, \ t), \quad i = 1, 2, ..., \ f. \tag{4.63}$$

Cada variable x_i representa a una de las coordenadas cartesianas del sistema, f es el número de grados de libertad del sistema

mecánico bajo estudio[7]; de esta forma, el sistema tiene orden $2f$ (f ecuaciones diferenciales de segundo orden) y su solución requiere de $2f$ contantes que se determinan por las condiciones iniciales:

$$x_i(t = t_0) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, ..., f \tag{4.64}$$

$$\dot{x_i}(t = t_0) = \alpha_i, \quad i = f + 1, ..., 2f. \tag{4.65}$$

La solución a este sistema mecánico se logra cuando obtenemos a cada coordenada y velocidad como una función del tiempo en términos de las condiciones iniciales y esta solución es única:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2f}\ ), \qquad i = 1, 2, ..., f, \\ \dot{x_i} &= \dot{x_i}(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2f}\ ) \qquad i = 1, 2, ..., f. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Las $2f$ constantes α_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales (4.65). El conjunto de $2f$ soluciones (4.66) puede ser invertido para obtener a las $2f$ constantes $\alpha_i, i.e.$,

$$\alpha_j = \alpha_j(x_1, x_2, ..., x_f,\ \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_f, t) = cte, \qquad j = 1, 2, ..., 2f. \tag{4.67}$$

Las constantes α_j se definen como las *integrales del movimiento;* conocer las $2f$ constantes (4.67) es equivalente a conocer las $2f$ soluciones (4.66) que satisfacen las condiciones iniciales apropiadas. Entonces, podemos establecer el siguiente resultado:

Todo sistema de ecuaciones diferenciales de orden $2f$ tiene $2f$ integrales de movimiento, conocer estas integrales de movimiento es equivalente a conocer la solución del problema.

Cuando una integral de movimiento no es función explícita del tiempo se le llama constante de movimiento [19]. Debemos hacer notar que estas constantes pueden tener dependencia

[7]El número de grados de libertad es el número mínimo de variables necesarias para describir completamente el movimiento. Para un sistema de n partículas interaccionando y sin restricción alguna $f = 3n$ siendo n el número de partículas.

explícita en el tiempo, al menos una de ellas debe ser función del tiempo (ver ejemplo en esta sección y ejercicio al final del capítulo).

La propiedad más importante y útil de estas integrales de movimiento es que $\frac{d\alpha_j}{dt} = 0$, por lo tanto debe cumplirse que:

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \dot{x}_i} \phi_i(x_i, \dot{x}_i, t) + \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = 0,$$
$$j = 1, 2, ..., 2f, \tag{4.68}$$

aquí hemos hecho uso de la ecuación (4.63). Este conjunto de ecuaciones diferenciales es equivalente a las ecuaciones de movimiento[8].

Este conjunto α_j de integrales de movimiento puede transformarse arbitrariamente a otro conjunto de $2f$ constantes β_j que tiene las mismas propiedades; por ejemplo, una combinación lineal del conjunto α_j constituye también un conjunto de integrales del movimiento de las mismas ecuaciones diferenciales y con las mismas condiciones iniciales,

$$\beta_k = \beta_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{2f}, t); \tag{4.69}$$

i.e., las integrales de movimiento no son únicas; sin embargo, las soluciones (4.66) sí lo son.

Ejemplo. Para ilustrar el concepto de integral de movimiento consideremos un ejemplo sencillo, el oscilador armónico simple; la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.70}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$, supongamos que las condiciones iniciales son las siguientes,

$$x(t = 0) = x_0, \tag{4.71}$$
$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0. \tag{4.72}$$

[8]Para mayores detalles pueden consultarse las referencias [14, 16]

El sistema tiene $f = 1$ grados de libertad y el orden es $2f = 2$. En el capítulo 2 mostramos que la solución general para este caso es:

$$x = A\ sen\ (\omega_0 t + \phi), \tag{4.73}$$

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi). \tag{4.74}$$

Las constantes A y ϕ están determinadas por las condiciones iniciales. De estas ecuaciones despejamos A y ϕ obteniendo que

$$\beta_1(x, \dot{x}, t) = A = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}} = cte, \tag{4.75}$$

$$\beta_2(x, \dot{x}, t) = \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0 x}{\dot{x}}\right) - \omega_0 t = cte, \tag{4.76}$$

éstas son las integrales de movimiento del sistema. Conociendo estas constantes el problema mecánico está resuelto de forma inmediata, invirtiéndolas obtenemos inmediatamente las soluciones x y $\dot{x}$ como funciones del tiempo y de las condiciones iniciales.

La primera constante β_1 se puede escribir así,

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{m}{k}\dot{x}^2} = \sqrt{\frac{2}{k}E} \tag{4.77}$$

$$\frac{k}{2}A^2 = \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 = E, \tag{4.78}$$

i.e., es proporcional a la energía que en este caso es una constante. La segunda constante β_2 depende explícitamente del tiempo y no se puede relacionar con un teorema de conservación, esta es la razón por la que en ocasiones no podemos conocer algunas integrales del movimiento. Inversamente, si conocemos las integrales de movimiento, de las ecuaciones 4.75 y 4.76 podemos despejar a $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ resolviendo así el problema. En el caso del oscilador armónico simple sabemos que la única fuerza aplicada es conservativa y por lo tanto podemos establecer la

conservación de la energía que es por sí misma una integral de movimiento, de ella podemos despejar a la velocidad

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{k}{2}x^2)} \ . \tag{4.79}$$

Esto lo interpretaremos así: si la energía se conserva, ésta permite disminuir en uno el orden de las ecuaciones de movimiento. En lugar de resolver la ecuación diferencial de segundo orden (4.70) reducimos el problema al de una ecuación diferencial de primer orden (4.79) la cual es siempre más fácil, esta ecuación se integra inmediatamente. Esto es, la integral de movimiento correspondiente a la energía (ecuación 4.75) permite resolver un problema unidimensional por lo menos hasta una cuadratura.

Para problemas simples como éste, resolver el problema por medio de sus integrales de movimiento resulta ser más complicado que por un método directo; sin embargo, para problemas con varios grados de libertad donde usualmente las ecuaciones de movimiento están acopladas, el conocimiento de las integrales de movimiento resulta muy importante.

Conociendo las leyes de fuerza, el movimiento de sistemas mecánicos puede ser calculado a partir de la segunda ley de Newton, imponiendo apropiadamente las condiciones iniciales; el estudio del movimiento se reduce a integrar las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, integrar las ecuaciones de movimiento presenta la dificultad intrínseca a todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden: no hay teoremas generales para su solución. Por esta razón, resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento suele ser imposible en muchos casos de interés.
Resumiendo: Para integrar las ecuaciones diferenciales es necesario conocer las llamadas integrales del movimiento:

$$\beta_j(x_i, \dot{x_i}, t) = cte, \quad j = 1, 2, 3, ..., 2f, \tag{4.80}$$

éstas son funciones dinámicas definidas como funciones de las coordenadas y velocidades del sistema. Cuando un sistema me-

cánico posee estas integrales de movimiento, en muchas ocasiones corresponden a cantidades que se conservan. Son pocas las integrales de movimiento conocidas, entre las más generales e importantes se encuentran: el momento lineal, el momento angular y la energía; hay también algunas otras integrales de movimiento útiles para casos específicos como es el caso del vector de Laplace-Runge-Lenz en el problema del campo central $V(r) = \alpha/r$.

El estudio del movimiento requiere entonces del conocimiento de las integrales del movimiento y de las condiciones dinámicas para que aparezcan estas integrales (teoremas de conservación). Si conocemos las $2f$ integrales de movimiento el problema mecánico se resuelve por una simple inversión de las ecuaciones (4.67).

Para un sistema dinámico de orden $2f$ el conocimiento de f integrales de movimiento permitiría usar las ecuaciones (4.67) para escribir

$$\dot{x_i} = \dot{x_i}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_f,\ x_1, x_2, ..., x_f, t), \tag{4.81}$$

estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de movimiento pero ahora son ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales, en principio, son siempre solubles. Esto quiere decir que la solución formal a un problema dinámico de orden $2f$ requiere del conocimiento de f integrales de movimiento. Un ejemplo es el sentido contrario es el problema de tres cuerpos, que no ha sido posible resolverlo de forma analítica debido a que no se conoce el número suficiente de integrales de movimiento (ver por ejemplo la referencia [14, 16]).

4.5. Campo central

Para ilustrar el valor de los teoremas de conservación recientemente expuestos, consideremos el problema de dos partículas

que interaccionan por campo central. Resolvemos el caso particular de dos partículas puntuales interaccionando por medio de una fuerza de restitución lineal, por un resorte. En esta sección lo resolveremos por el método de Newton y en el capítulo 6 retornaremos a este problema y lo resolveremos por el método de Lagrange. Aquí, desarrollaremos un método para llevar el problema hasta una forma en que la solución final se obtiene de una integral definida (hasta una cuadratura). Mostraremos que para esto es necesario que existan tantas cantidades conservadas (constantes de movimiento) como variables tenga el sistema (grados de libertad). Con cada integral de movimiento podemos eliminar un grado de libertad o disminuir el orden de la ecuación diferencial, simplificando o resolviendo el problema.

Supongamos dos partículas puntuales, aisladas, con masas m_1 y m_2 e interaccionando por una fuerza central conservativa:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -\nabla V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \tag{4.82}$$

de esta forma, la fuerza satisface la tercera ley de Newton y está a lo largo de la línea que une a las partículas. Este caso se conoce como el problema de dos partículas interaccionando por campo central, tiene seis variables a determinar *i.e.*, tiene seis grados de libertad y su solución implica conocer doce integrales de movimiento.

Debido a que la fuerza externa total es nula, aplicamos el teorema de conservación del momento lineal; las tres primeras integrales (constantes) de movimiento son las tres componentes del momento lineal total,

$$M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = cte. \tag{4.83}$$

Estas tres integrales del movimiento permiten resolver y eliminar tres grados de libertad: las coordenadas del CM. De esta manera obtenemos que la posición del centro de masa se mueve en la siguiente trayectoria

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}_{CM}\, t + \mathbf{R}_0, \tag{4.84}$$

las seis constantes $\mathbf{V}_{CM}$ y $\mathbf{R}_0$ están determinadas por las condiciones iniciales. Esto es, la conservación del momento lineal total proporciona tres integrales de movimiento, las componentes de la velocidad del centro de masa y la integración de ellas proporciona otras tres integrales de movimiento, la condición inicial para el vector $\mathbf{R}_0$.

Este hecho nos permite cambiar el sistema de referencia al punto CM, el cual, por el hecho de moverse a velocidad constante también es un SIR. De esta forma el movimiento del CM está completamente determinado y la descripción de su movimiento es irrelevante para el resto de la dinámica.

Definamos ahora las variables de centro de masa y coordenada relativa, la masa total y la masa reducida:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}&=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2},\\
\mathbf{r}&=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1.\\
M&=m_1+m_2,\\
\mu&=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.
\end{aligned}\tag{4.85}$$

En el nuevo sistema de referencia (el CM), podemos escribir la posición de las partículas medida desde el nuevo origen de la siguiente forma (ver figura (4.1.)):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i&=\mathbf{R}+\mathbf{r}'_i,\\
\mathbf{r}'_1&=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r},\\
\mathbf{r}'_2&=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}.
\end{aligned}\tag{4.86}$$

De esta forma la posición de ambas partículas está determinada por el vector relativo $\mathbf{r}$ y sólo quedan tres grados de libertad.

La siguiente integral de movimiento es el momento angular, usando esta transformación de coordenadas podemos escribir al momento angular relativo de la siguiente forma (ver ecuaciones

(4.32) y (4.33)):

$$\overrightarrow{\ell} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i^{'} \times \mathbf{p}_i^{'} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{4.87}$$

donde $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ es el momento lineal relativo. La última igualdad puede obtenerse usando las ecuaciones (4.32) y (4.86). De esta expresión podemos calcular el torque aplicado medido desde el CM,

$$\mathbf{N}' = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i^{'} \times \dot{\mathbf{p}}_i^{'} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i^{'} \times \mathbf{F}_i, \tag{4.88}$$

considerando que las fuerzas sobre las partículas satisfacen la tercera ley de Newton y están dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas; y usando la ecuación (4.82) se obtiene que el torque es cero; entonces, el momento angular relativo (ecuación (4.87)) es una constante. Tanto el vector como su magnitud son constantes, la dirección constante de $\overrightarrow{\ell}$ la podemos identificar por el siguiente vector unitario,

$$\widehat{\mathbf{u}}_\ell = \frac{\overrightarrow{\ell}}{|\ell|} = cte. \tag{4.89}$$

Esto implica que los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ son siempre perpendiculares al vector $\widehat{\mathbf{u}}_\ell$, i.e., $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ siempre están en un plano constante perpendicular a $\widehat{\mathbf{u}}_\ell$. El hecho de que exista esta integral de movimiento (la dirección del momento angular) hace que el movimiento se realice en un plano.

La siguiente integral de movimiento es la energía; debido a que las únicas fuerzas presentes son las fuerzas de interacción entre las partículas y son conservativas, podemos escribir la energía total de la siguiente forma:

$$E = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^{\,2} + V(r), \tag{4.90}$$

donde $V(r)$ es la energía potencial correspondiente a la fuerza (4.82). Si ahora transformamos por las ecuaciones (4.85) la

energía queda de la siguiente forma:

$$E = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + V(r), \tag{4.91}$$

el primer término del lado derecho es la energía cinética del CM y es una constante; definamos a la constante de energía relativa

$$E' = E - \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} = \frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + V(r). \tag{4.92}$$

Debido a que el movimiento es en un plano, podemos usar las coordenadas polares en ese plano y escribir que:

$$E' = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r), \tag{4.93}$$

esto es, haciendo uso de la cuarta y quinta integrales de movimiento hemos reducido el problema a sólo dos grados de libertad, r y θ.

La siguiente integral o constante de movimiento que usamos es la magnitud del momento angular, que en este sistema de coordenadas se puede escribir como sigue:

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = \ell = \mu r^2\dot{\theta} = cte, \tag{4.94}$$

esto nos permite eliminar a la velocidad angular[9],

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2}. \tag{4.95}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (4.93) obtenemos una ecuación diferencial de primer orden en la variable r :

$$E' = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r), \tag{4.96}$$

[9]La conservación del momento angular permite demostrar que el área descrita por el radio vector relativo, describe áreas iguales y tiempos iguales. Esta propiedad es válida para todo problema de campo central, para el potencial gravitacional ésta es la segunda ley de Kepler, ver capítulo 6.

el cual es el problema equivalente en una dimensión para una partícula de masa efectiva μ (la masa reducida) y cuya posición esta determinada por la posición r[10]. La solución para la ecuación (4.96) es la siguiente,

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E' - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}, \tag{4.97}$$

que puede ser integrada inmediatamente,

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E' - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}}, \tag{4.98}$$

la constante $r(t_0)$ es la condición inicial para la posición relativa.

La ecuación (4.98) proporciona la solución para la trayectoria por medio de una integral definida, resolviendo primero para $r(t)$ y sustituyendo en la ecuación (4.95) para $\theta = \theta(t)$.

Frecuentemente la ecuación (4.98) no se puede integrar analíticamente, sin embargo podemos eliminar al tiempo en esta descripción y obtener la órbita $r = r(\theta)$. Para ello recurrimos a la conservación del momento angular, ecuación (4.95), para relacionar a dt con $d\theta$, eliminando así al parámetro tiempo de la descripción.

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}, \tag{4.99}$$

combinando este resultado con la ecuación (4.97) obtenemos la solución para la órbita

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{\ell dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E' - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2})}}, \tag{4.100}$$

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E'}{\ell^2} - \frac{2\mu}{\ell^2}V(\frac{1}{u}) - u^2}} \quad . \tag{4.101}$$

[10]El término $\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)$ es el potencial efectivo, éste puede analizarse gráficamente y obtener de él propiedades generales del movimiento, ver el capítulo 6.

En esta última ecuación hemos hecho el cambio de variable $u = 1/r$, nótese que este resultado es válido para cualquier fuerza central de la forma (4.82).

Para algunas formas específicas del potencial $V(r)$, la solución a esta ecuación puede practicarse analíticamente en el caso de potenciales que se pueden escribir como una potencia de la posición r; en particular el caso de la fuerza de un resorte $V(r) = \alpha r^{n+1}$, $(n = 1)$ es soluble analíticamente (para otras potencias de r véase por ejemplo las referencias [12, 14] y el capítulo 6).

En el caso del oscilador armónico la función potencial se escribe como sigue,

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2, \tag{4.102}$$

y la ecuación de la órbita se convierte en

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E'}{\ell^2} - \frac{\mu k}{\ell^2 u^2} - u^2)}}, \tag{4.103}$$

haciendo ahora el cambio $u^2 = v$, la última ecuación se puede arreglar a

$$\theta - \theta_0 = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{2\sqrt{av - b - v^2}}, \tag{4.104}$$

donde $a = \frac{2\mu E'}{\ell^2}$ y $b = \frac{2\mu k}{\ell^2}$ de tal forma que la ecuación (4.104) ahora se escribe como sigue,

$$\theta - \theta_0 = -\frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{(\frac{a^2}{4} - b) - (v - \frac{a}{2})^2}}, \tag{4.105}$$

cuya integración es directa, resultando que:

$$2(\theta - \theta_0) = ang\cos\left(\frac{v - \frac{a}{2}}{(\frac{a^2}{4} - b)^{\frac{1}{2}}}\right) - \delta, \tag{4.106}$$

donde la constante δ está determinada por la velocidad inicial v_0,

$$\delta = ang\cos\left(\frac{v_0 - \frac{a}{2}}{(\frac{a^2}{4} - b)^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{4.107}$$

Finalmente, el radio vector relativo tiene por solución

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\mu E'}{\ell^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 E'^2}{\ell^4} - \frac{2\mu k}{\ell^2}}\cos(2\theta - 2\theta_0), \tag{4.108}$$

de esta forma la órbita $r = r(\theta)$ depende solamente de las condiciones iniciales y de las constantes del movimiento: energía y momento angular relativos; los parámetros de la órbita son E, k y μ. La solución (4.108) corresponde a una elipse si $k > 0$ y a una hipérbola si $k < 0$, en ambos casos el centro de la sección cónica está en el origen hacia donde está dirigida la fuerza. Este resultado era conocido por Newton, quien afirmaba: que una partícula (de masa reducida μ) sujeta a una fuerza proporcional a la distancia al origen describe una elipse con centro en el centro de fuerzas [49].

El problema de dos partículas interaccionando por un campo central con seis grados de libertad es soluble gracias a que pudimos usar seis constantes de movimiento (primeras integrales); en este caso fueron: las tres componentes del momento lineal total, dirección y magnitud del momento angular y la energía[11]. La solución de este problema fue posible gracias al conocimiento de las doce integrales de movimiento necesarias: la velocidad del CM $\mathbf{V}_{CM}$, la posición inicial del CM $\mathbf{R}_0$, las tres componentes del momento angular $\mathbf{L}$, la energía E y las dos condiciones iniciales $r_0 = r(t_0)$ y $\theta_0 = \theta(t_0)$. Recordemos que las integrales de movimiento no son todas independientes, por ejemplo la ecuación (4.96) muestra que la energía y la magnitud del momento angular no son independientes.

[11] La dirección del momento angular $\widehat{\mathbf{u}}_l$ aporta dos integrales de movimiento, los dos ángulos que definen la dirección de un vector unitario, la conservación de la magnitud del momento angular proporciona la tercera integral. Se puede probar que la energía se escribe en términos de las otras integrales de movimiento. De esta forma, para resolver los últimos tres grados de libertad son necesarias tres integrales de movimiento.

4.6. Ejercicios

1. Complete los pasos algebraicos necesarios para obtener las ecuaciones (4.33) y (4.37).

2. Considere que una persona es abandonada en la superficie de un lago helado (no hay fricción). Describa tres métodos para alcanzar la orilla y en qué propiedad física se basa (teorema de conservación). ¿Por qué con unos patines para hielo una persona puede desplazarse a su gusto sobre el hielo?

3. Sobre una mesa horizontal sin fricción se hace un pequeño orificio por el que pasa una cuerda de masa despreciable, en el extremo de la cuerda se sujeta una partícula de masa m que rota sobre la mesa inicialmente a un radio R y con rapidez angular ω_0; el extremo de la cuerda, abajo de la mesa, se jala con una fuerza constante muy pequeña. Encuentre la rapidez angular con que se mueve la partícula a cada valor del radio r.

4. Usando el teorema trabajo-energía, resuelva el problema de un bloque de masa m bajando por un plano inclinado un ángulo α y donde el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es μ.

5. Para el caso de la fuerza de atracción gravitacional,

$$\mathbf{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}\widehat{\mathbf{r}},$$

demuestre que la función potencial se escribe como sigue:

$$V_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

6. Una cuenta de masa m se inserta en un alambre delgado de forma elíptica de semiejes a y b, colocado verticalmente en presencia de un campo gravitacional homogéneo de aceleración g, entre el alambre y la cuenta no hay fricción; la

fuerza de reacción del alambre sobre la partícula es siempre perpendicular al alambre de tal forma que esta fuerza no hace trabajo. En un vértice de la elipse a la partícula se le proporciona una velocidad tangencial v_0. Obtenga una expresión para la velocidad angular de la partícula como función de su posición sobre la elipse. Sugerencia: use la conservación de la energía y escriba la ecuación de la elipse en coordenadas polares o elípticas.

7. Considere el oscilador armónico bidimensional isótropo donde la fuerza de gravedad ha sido eliminada por una mesa plana horizontal sin fricción, calcule la energía potencial y resuelva el movimiento usando la conservación de la energía y del momento angular.

8. Resuelva el péndulo simple usando la conservación de la energía. ¿por qué se conserva la energía en presencia de la fuerza de tensión? Considere que el aire no presenta oposición al movimiento.

9. ¿Puede aplicarse el teorema del virial en la forma de la ecuación (4.53) a el péndulo? ¿Por qué? ¿Cómo se escribe el teorema del virial en este caso?

10. Para el oscilador no isótropo en dos dimensiones ($k_x \neq k_y$), ¿cuál es la forma del teorema del virial? Calcule explícitamente los promedios temporales de la energía cinética y potencial.

11. Obtenga las integrales del movimiento para los siguientes sistemas de un solo grado de libertad: a) El péndulo simple. b) Una partícula cayendo en un campo gravitacional homogéneo. Demuestre que la energía se puede escribir en términos de estas integrales de movimiento. Demuestre explícitamente que cumplen con la ecuación (4.68).

12. Suponga una partícula puntual de masa m que puede deslizarse sin fricción en el interior de un cono de apertu-

ra α. actúan la fuerza de gravedad y la fuerza de reacción del cono sobre la partícula que es perpendicular al desplazamiento de la partícula. Existen dos integrales de movimiento, ¿cuáles son?; usando estas integrales de movimiento y coordenadas cilíndricas resuelva el problema hasta una integral definida.

5

MÉTODO DE LAGRANGE

En este capítulo estudiamos los sistemas con movimiento restringido, en los que aparecen fuerzas de restricción que no son conocidas a priori. Introducimos el concepto de coordenada generalizada y el principio del trabajo virtual para poder eliminar a las fuerzas de restricción; estudiamos el concepto de restricción holonómica y el principio de D'Alembert. Con esto, obtenemos las ecuaciones de movimiento de Lagrange para sistemas conservativos y no conservativos. Estudiamos las ecuaciones de Lagrange cuando las fuerzas son derivables de un potencial y de un potencial generalizado dependiente de las velocidades; aplicamos el método al caso de los potenciales electromagnéticos. Obtenemos los teoremas generales de conservación en el formalismo de Lagrange y los relacionaremos con las propiedades de simetría del espacio y el tiempo. Introducimos la función de Hamilton y las ecuaciones de movimiento que de ella resultan. Las referencias complementarias a este capítulo son: [1, 2, 6, 7, 12, 14, 17, 16, 18, 19, 50].

5.1. Restricciones

Hasta este punto hemos considerado que la fuerza $\mathbf{F}$ en la ecuación de movimiento es conocida; de ahí, que el problema mecánico se reduzca a resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales apropiadas. Sin embargo, existen

sistemas mecánicos para los cuales parte de la fuerza no se conoce *a priori*. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema: una partícula colocada sobre un cascarón esférico en presencia del campo gravitatorio y no hay fricción entre la partícula y la esfera; el cascarón reacciona al peso de la partícula ejerciendo sobre la partícula una fuerza normal a la superficie de tal forma que la partícula sólo puede desplazarse sobre el cascarón esférico (ver figura (5.7.)), la fuerza normal $\mathbf{R}$ no es conocida de antemano; ésta, causa que la partícula se mueva a lo largo de la esfera y eventualmente se separe de ella, impidiendo el movimiento en la dirección perpendicular a la superficie, nulificando la componente en esta dirección de la fuerza de gravedad. En este caso el movimiento de la partícula está *restringido* (constreñido) a que la partícula permanezca siempre a una distancia igual o mayor que el radio de la esfera, es decir $r \geq a$. Generalmente, el conocimiento de las fuerzas de restricción sólo es posible cuando el problema se ha resuelto.
En los problemas en los que el movimiento se restringe de alguna forma, a través de recipientes, cuerdas, paredes, barras, etc. las fuerzas de restricción se conocen por su efecto, no son un dato del problema ni obedecen leyes generales de movimiento, adoptan formas específicas para cada circunstancia. Para poder resolver un problema mecánico, donde aparecen restricciones, es necesario primero eliminar las fuerzas causadas por las restricciones por algún método, de manera semejante a como lo hicimos en el estudio del plano inclinado o de los péndulos en el capítulo 2. En muchas ocasiones necesitamos de una solución particular para cada problema particular. Sin embargo, para cierto tipo de restricciones la formulación de Lagrange permite escribir las ecuaciones de movimiento eliminando a las fuerzas de restricción.

Las restricciones que se imponen a los sistemas mecánicos pueden clasificarse en varias formas:

Holonómicas: son aquellas restricciones que se pueden es-

cribir como una función analítica de las coordenadas de las partículas, $f\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n\,;\, t) = 0$. Por ejemplo, las restricciones entre las partículas que forman un cuerpo rígido $r_{ij}^2 - c_{ij}^2 = 0$, o una masa sujeta a una cuerda destinada a moverse como péndulo $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = l$, a estas restricciones también se les llama analíticas o integrables.

No holonómicas: como lo indica su nombre, son aquéllas que no pueden ser escritas como una función entre las coordenadas de las partículas. Por ejemplo, una partícula por encima de un cascarón esférico en presencia de un campo de gravedad, $r \geq a$; también, aquellas en que las variables están ligadas por medio de una forma diferencial como es el caso de un disco rodando sin resbalar que mantiene la posición vertical (ver el ejemplo en la siguiente sección).

Se puede también clasificar a las restricciones de acuerdo a su dependencia temporal,

reónomas, si dependen del tiempo,
esclerónomas, si son independientes del tiempo.

En el caso de restricciones holonómicas, conviene introducir un conjunto f de coordenadas independientes, llamadas *coordenadas generalizadas* q_1, q_2, ..., q_f donde $f = 3n - k$, n es el número de partículas ($3n$ coordenadas cartesianas) y k el número de restricciones holonómicas en el sistema. Entonces, existen k funciones de la forma[1]

$$\begin{aligned} &f_1\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n\,; t\right) = 0 \\ &\vdots \\ &f_k\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n\,; t\right) = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

tales que podemos escribir:

[1]Esta notación es una forma breve de: $f_1(x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n, t) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{g}_1\left(q_1, q_2, ..., q_f\,; t\right) \\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{g}_2\left(q_1, q_2, ..., q_f\,; t\right) \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_n &= \mathbf{g}_n\left(q_1, q_2, ..., q_f\,; t\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

f es el número de grados de libertad del sistema[2].

El conjunto de coordenadas q_1, q_2, ... q_f no necesariamente puede representarse como vector o como conjunto de vectores, más aún, no son necesariamente cartesianas y pueden no tener el mismo tipo de unidades; i.e., pueden ser variables longitudinales, pueden ser ángulos, inclusive pueden ser usadas cantidades con dimensiones de energía, etc. El único requisito es que sean independientes entre sí y que se puedan escribir las funciones (5.2), *i.e.*, las coordenadas generalizadas no son únicas.

5.2. Ejemplos de restricciones

Ilustraremos ahora varios casos de movimiento restringido, identificando en cada caso: el tipo de restricción, las fuerzas de restricción, los grados de libertad y un conjunto de coordenadas generalizadas que pueden describir al sistema.

1. Una partícula de masa m, moviéndose en un plano inclinado, sin fricción, el movimiento también está restringido a moverse en un plano vertical (ver figura (5.1.)), esto se logra imponiendo la condición inicial en la que no hay velocidad inicial en la dirección perpendicular al plano vertical. En este ejemplo la fuerza de restricción $\mathbf{R}$ es la reacción del plano a la fuerza de gravedad del cuerpo y se ejerce sobre el cuerpo**,** es perpendicular al plano (de lo contrario habría movimiento perpendicular al plano), las restricciones son $k = 2$ y son funciones analíticas,

[2]Esta notación es una abreviatura de $x_1 = g_{1x}(q_1, q_2, \cdots q_n, t)$, $y_1 = g_{1y}(q_1, q_2, \cdots q_n, t)$, $z_1 = g_{1z}(q_1, q_2, \cdots q_n, t)$, etc.

i.e., son holonómicas; el sistema tiene un solo grado de libertad, la coordenada generalizada se puede escoger como la distancia sobre el plano medida desde el punto $P(0, y_0)$.

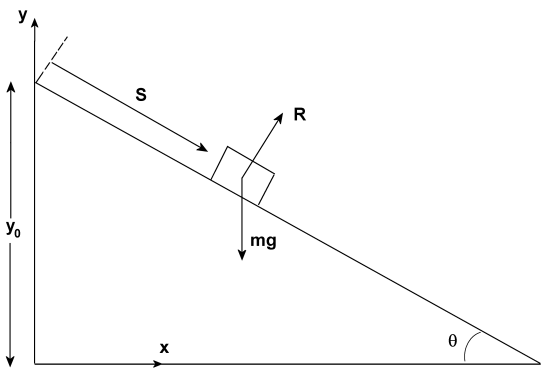

Figura 5.1. Una partícula desliza sobre un plano inclinado, no hay rozamiento y se mueve en el plano xy.

$\mathbf{F}^{(r)} = \mathbf{R}$	fuerza de restricción
$y - y_o = -\tan\theta \cdot x$	restricción holonómica
$z = z_0$	restricción holonómica
$k = 2$	
$f = 1$	
$q_1 = s$.	

2. Una partícula moviéndose en la superficie interior de un tazón esférico, cuya energía cinética no le permite abandonar el interior del cascarón, $T \leq mga$, ver figura (5.2.)

Hay una restricción holonómica, la distancia de la partícula al centro del tazón es constante, las coordenadas generalizadas se pueden escoger como los ángulos θ y ϕ medidos desde el centro

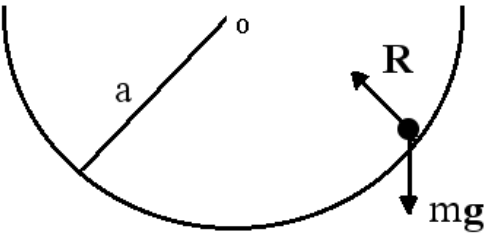

Figura 5.2. Una partícula puntual está restringida a moverse sobre la superficie interior de un tazón esférico.

del tazón esférico.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}^{(r)} = \mathbf{R} && \text{fuerza de restricción}\\
&r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = a && \text{restricción analítica}\\
&k = 1\\
&f = 2\\
&q_1 = \theta, \;\; q_2 = \phi \; .
\end{aligned}$$

3. Una cuenta moviéndose en un alambre plano contenido en el plano $z = z_0$ de tal forma que sólo puede moverse en la curva plana que describe al alambre y se coloca en un plano vertical, la fuerza de restricción $\mathbf{R}$ es la normal a la curva y obliga a la cuenta a mantenerse en el alambre, ver figura (5.3.). El alambre tiene la forma $y = f\,(x)$, las restricciones son funciones analíticas (i.e. holonómicas), hay un grado de libertad y la coordenada generalizada asociada a éste puede ser la longitud del arco sobre el alambre s, medido desde algún origen arbitrario en el alambre.

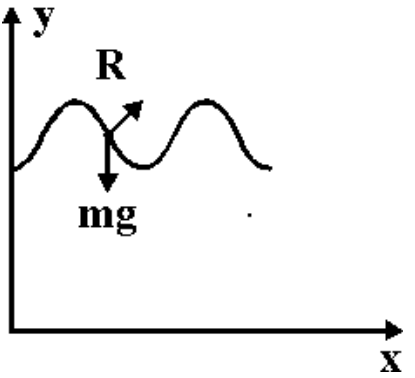

Figura 5.3. Una cuenta restringida a moverse insertada en un alambre contenido en el plano xy, el alambre tiene la forma $y = f\,(x)$.

$\mathbf{F}^{(r)} = \mathbf{R}$	fuerza de restricción
$y = f\,(x)\,,$	restricción analítica
$z = z_0$	restricción analítica
$k = 2$	
$f = 1$	
$q_1 = s$	

4. Péndulo esférico. Una partícula de masa m cuelga de un punto fijo por medio de una cuerda de longitud constante L, la cuerda es de masa despreciable y el movimiento es en tres dimensiones. La distancia al punto de suspensión es constante, la restricción es holonómica. Hay dos grados de libertad que se pueden escoger como los ángulos esféricos θ y ϕ medidos desde el punto de suspensión con respecto a la dirección vertical definida por la gravedad (ver figura (5.4.)). La fuerza de restricción es la tensión de la cuerda $\mathbf{T}$, mientras que la fuerza aplicada es la gravedad.

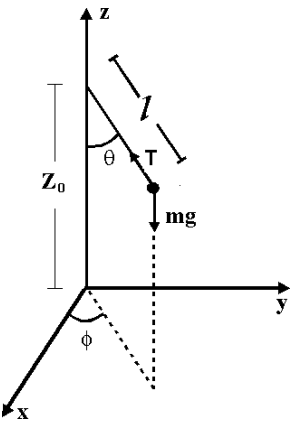

Figura 5.4. Péndulo esférico, la longitud de la cuerda L es constante y su masa despreciable.

$$\mathbf{F}^{(r)} = \mathbf{T} \qquad \text{fuerza de restricción}$$
$$r = \left(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\right)^{1/2} = L \qquad \text{restricción holonómica}$$
$$k = 1$$
$$f = 2$$
$$q_1 = \theta, \;\; q_2 = \phi$$

5. Una mancuerna: Dos masas puntuales sujetas por una barra de masa despreciable cuyo punto medio gira sobre un círculo de radio a en el plano xy (ver figura (5.5.)). Las tres restricciones son holonómicas, hay dos partículas, los grados de libertad pueden escogerse como los ángulos esféricos θ y ϕ que hace la barra con la dirección vertical y su proyección en el plano xy, y el ángulo ξ que determina la posición del punto medio de

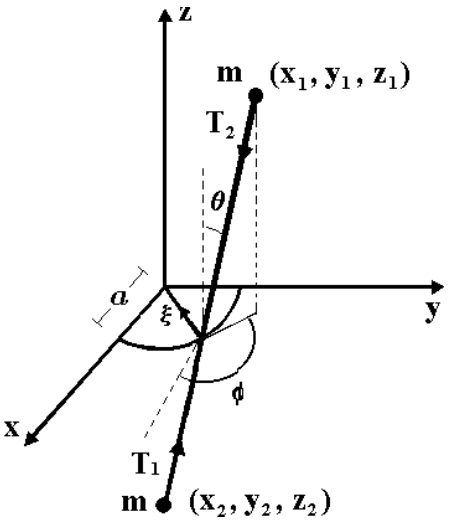

Figura 5.5. Una mancuerna, cuyo punto medio se mueve sobre un círculo horizontal de radio a.

la barra con respecto al eje x.

$\mathbf{F}_1^{(r)} = \mathbf{T}_1,\ \mathbf{F}_2^{(r)} = \mathbf{T}_2,\ \mathbf{F}_3^{(r)} = \mathbf{F}_{CM},$ fuerzas de restricción

$z_1 = -z_2$ restricción holonómica

$\ell = r_{12} = \Big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 +$

$+ (z_1 - z_2)^2\Big)^{1/2}$ restricción holonómica

$a = r_p = ((\frac{x_1+x_2}{2})^2 + (\frac{y_1+y_2}{2})^2)^{\frac{1}{2}}$ restricción holonómica

$n = 2$

$k = 3$

$f = 3$

$q_1 = \theta,\ \ q_2 = \phi,\ q_3 = \xi$

6. Partícula encerrada en una caja. Una partícula, que representa a cualquier partícula en un gas ideal, se encuentra contenida en un volumen V limitado por paredes rígidas. La partícula

choca elásticamente con las paredes. Las fuerzas de restricción son aquellas que cambian la dirección del movimiento (ver figura (5.6.)).

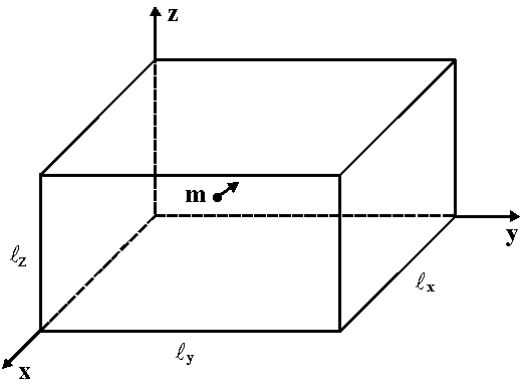

Figura 5.6. La partícula rebota elásticamente con las paredes rígidas de la caja.

Las restricciones son no holonómicas.

$$0 \leq x \leq \ell_x$$
$$0 \leq y \leq \ell_y$$
$$0 \leq z \leq \ell_z$$

7. Partícula resbalando sobre un cascarón esférico.

$$r \geqslant a$$

Una parte del movimiento tiene restricción holonómica, cuando la partícula está en contacto con la esfera, cuando la partícula abandona el casacrón se convierte en un problema sin restricción. Este es un buen ejemplo de restricciones combinadas donde parte del movimiento tiene restricción holonómica y otra parte

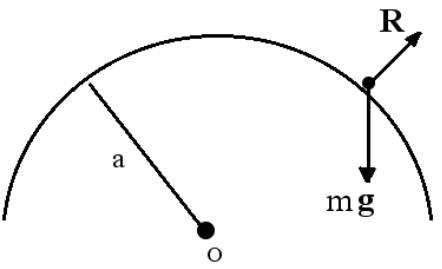

Figura 5.7. Una partícula sobre la superficie de un cascarón esférico.

de él no tiene restricción. La fuerza de restricción es nuevamente la fuerza normal de reacción del cascarón esférico (ver figura (5.7.)).

8. Condición de rodamiento para un disco cuyo eje de rotación es siempre horizontal (ver figura (5.8.)).

La condición de rodamiento y las componentes de la velocidad del punto de contacto se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v &= a\dot{\phi} \\ \dot{x} &= v\, sen\theta, \\ \dot{y} &= -v\cos\theta, \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} dx - a\, sen\theta d\phi &= 0 \\ dy + a\, \cos\theta d\phi &= 0. \end{aligned}$$

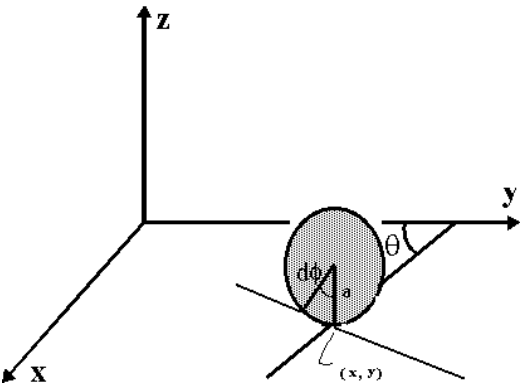

Figura 5.8. El disco mantiene su posición vertical, su eje de rotación hace un ángulo θ con el eje y.

La condición de rodamiento significa que la distancia recorrida sobre el plano es igual al arco que ha rotado el disco. En este ejemplo, la restricción es no holonómica, la relación entre las variables es una forma diferencial; para conocer la función que liga a x con y es necesario resolver primero el problema, esta restricción no es integrable. Existe un método especial para tratar este tipo de restricciones que tienen forma diferencial lineal, el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange (ver capítulo 9)

5.3. Principio de D'Alembert

Desplazamiento virtual

Un desplazamiento virtual es aquel que se realiza sobre cualquier partícula del sistema en un instante fijo del tiempo t_0 y que es consistente con las restricciones impuestas al sistema: el nombre de virtual proviene del hecho de no ser físico porque no involucra el cambio temporal. De acuerdo con las ecuaciones (5.2), que ya contienen las restricciones holonómicas impuestas

al sistema de partículas, el cambio virtual de la coordenada $\mathbf{r}_i$ será:

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q_j}\delta q_j, \tag{5.3}$$

este desplazamiento no tiene la evolución temporal y es consistente con las restricciones impuestas. Para distinguir a este desplazamiento de un cambio diferencial $d\mathbf{r}$, lo denotamos por el símbolo $\delta\mathbf{r}$.

Como ejemplo consideremos a un péndulo restringido a moverse en un plano y cuya cuerda es inextensible; las coordenadas cartesianas se pueden escribir en términos de la coordenada generalizada θ de la siguiente forma (ver figura (2.20.)):

$$\begin{aligned} x &= l\cos\theta, \\ y &= l\text{sen }\theta, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones cumplen con la forma exigida por las ecuaciones (5.2),

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{g}(\theta) = (l\cos\theta, l\text{sen}\theta, 0)$$

en este ejemplo sólo hay un grado de libertad y la coordenada generalizada es $q_1 = \theta$. De acuerdo a su definición (5.3), el desplazamiento virtual se puede escribir como sigue:

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial\theta}\delta\theta = (-l sen\theta\ \delta\theta\ ,\ l\cos\theta\ \delta\theta,\ 0) = (\delta x, \delta y, \delta z),$$

este desplazamiento está a lo largo del arco que describe el movimiento pendular (ver figura (5.9.)), es consistente con la restricción para que la longitud de la cuerda permanezca constante y no depende del tiempo pero sí de la posición. En este ejemplo es muy fácil comprobar que la fuerza responsable de la restricción, la tensión en la cuerda, no hace trabajo virtual, pues el desplazamiento virtual y la fuerza son perpendiculares, *i.e.*,

$$\delta W = \mathbf{T}\cdot\ \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Sobre este trabajo virtual profundizaremos más adelante (ver ejercicio al final del capítulo).

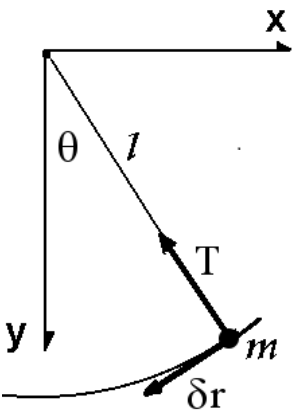

Figura 5.9. El desplazamiento virtual apunta en la dirección tangente al arco, perpendicular a la cuerda.

Iniciaremos el análisis de las fuerzas de restricción para un sistema en equilibrio, es decir, un sistema para el cual la fuerza total sobre cada partícula es nula, $\mathbf{F}_i = 0$, y claramente $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$; si sumamos estos ceros para todas las n partículas de un sistema en equilibrio tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{5.4}$$

La fuerza sobre cada partícula $\mathbf{F}_i$ puede descomponerse en sus partes, la fuerza aplicada $\mathbf{F}_i^{(a)}$ y la parte que causa la restricción $\mathbf{F}_i^{(r)}$ (si ésta existe), en el ejemplo del péndulo la fuerza aplicada es el peso mientras que la fuerza de restricción es la tensión; de esta manera la ecuación (5.4) se transforma a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(r)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad . \tag{5.5}$$

En el ejemplo del péndulo en equilibrio, en el punto donde $\theta = 0$, la fuerza de restricción es perpendicular al posible desplazamiento consistente con la restricción del problema, de tal forma que este trabajo virtual es nulo. Notemos que este trabajo virtual, de la fuerza de restricción, es nulo para cualquier punto de la trayectoria pues la tensión y el desplazamiento virtual son siempre perpendiculares. Esto puede comprobarse de forma general para sistemas en equilibrio con restricciones holonómicas. De aquí que parezca lógico *postular* que las fuerzas de restricción no hacen trabajo virtual, de tal manera que para las fuerzas aplicadas se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad , \qquad (\textit{Principio del trabajo virtual}) \quad (5.6)$$

eliminando así a las fuerzas de restricción y dejando solamente a las fuerzas aplicadas. Este último resultado, aunque útil conceptualmente, no aporta nada a la solución de sistemas dinámicos, pues corresponde al caso estático, y los desplazamientos $\delta\mathbf{r}_i$ no son independientes, pues ellos están relacionados por las ecuaciones de restricción.}

Consideremos el caso dinámico y escribamos la dinámica en un SIR en el cual $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ (segunda ley de Newton). La ecuación (5.4) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \; . \qquad (5.7)$$

Esta igualdad siempre se cumple debido a que la segunda ley de Newton para cada partícula anula a cada sumando. Escribamos a la fuerza total sobre cada partícula como la suma de fuerzas aplicadas y de fuerzas de restricción y postulemos nuevamente que las fuerzas de restricción no hacen trabajo virtual, entonces tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (\textit{Principio de D'Alembert}), \quad (5.8)$$

este último resultado es el llamado *principio de D'Alembert*. Nótese que las fuerzas de restricción no intervendrán más en la descripción, lo cual era nuestro objetivo.

Cada sumando en (5.8) no es nulo, pues los $\delta\mathbf{r}_i$ no son independientes. Para lograr esto necesitamos escribir (5.8) en términos de las coordenadas generalizadas de la sección anterior, las cuales son independientes[3].

5.4. Ecuaciones de Lagrange

Consideremos las restricciones (5.2):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{g}_i\left(q_1, q_2, ...q_f; t\right) \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n \tag{5.9}$$

de tal forma que los desplazamientos virtuales resultan ser:

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad . \tag{5.10}$$

La derivada respecto del tiempo no aparece por definición del desplazamiento virtual, éste se considera fijo. Ahora procederemos a escribir la expresión (5.8) en las coordenadas generalizadas para aprovechar su independencia. El primer término del lado izquierdo en la ecuación (5.8) se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{f} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j \tag{5.11}$$

donde hemos definido:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \tag{5.12}$$

[3]Mayores detalles pueden ser consultados en las referencias citadas en el inicio de este capítulo.

y la llamaremos la fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_j, notemos que ésta depende de todas las fuerzas aplicadas sobre todas las partículas, está asociada a un grado de libertad representado aquí por la coordenada q_j, no está asociada a una partícula especifica. En esta última relación notamos también que: si las q_i no tienen dimensiones de longitud, las dimensiones de Q_i serán tales que el producto $Q_i q_i$ tendrá dimensiones de trabajo; por ejemplo, si q_j en un ángulo, Q_j tiene las dimensiones de trabajo mientras que si q_j tiene dimensiones de longitud Q_j tiene dimensiones de fuerza.

Las velocidades de las partículas serán:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{5.13}$$

El segundo término del lado derecho en la ecuación (5.8) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{f} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad , \tag{5.14}$$

tomando en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}, \tag{5.15}$$

calculando explícitamente la última derivada obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \quad , \tag{5.16}$$

y lo podemos arreglar como sigue,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right), \tag{5.17}$$

donde las derivadas con respecto a q_j y t se han intercambiado[4]. Además, de la expresión (5.13) es muy fácil probar que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ . \tag{5.18}$$

Sustituyendo estos resultados en (5.15) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\} \ . \tag{5.19}$$

Por lo tanto, el segundo término del lado derecho en (5.8) se escribe como sigue:

$$\sum_{j=1}^{f} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^{\,2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 \right\} \delta q_j, \tag{5.20}$$

el término en la suma interior se identifica fácilmente como la energía cinética del sistema de n partículas

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^{\,2} \tag{5.21}$$

finalmente, la ecuación (5.8) queda de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \tag{5.22}$$

Las fuerzas de restricción se han eliminado gracias al principio de D'Alembert.

Debido a que las coordenadas generalizadas q_i son independientes, cada factor en la suma de (5.8) es nulo, y por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \ \ ; \ \ j = 1, 2, ..., f \ . \tag{5.23}$$

[4]De aquí en adelante consideraremos que dicho intercambio es válido. También, suponemos que para los problemas que nos interesan $r_i = r_i(q_j, t)$ es continua y diferenciable, con derivadas continuas en todos sus puntos.

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de Lagrange para las fuerzas generalizadas. Las fuerzas de restricción no intervienen en estas ecuaciones, de tal manera que el sistema puede describirse por las nuevas ecuaciones de movimiento (5.23), usando solamente las fuerzas aplicadas, pero en las coordenadas generalizadas q_j. La solución del problema consiste en escribir la energía cinética y las fuerzas generalizadas en términos de las coordenadas generalizadas y obtener mediante (5.23) las correspondientes ecuaciones de movimiento. La solución a estas ecuaciones diferenciales para f variables q_j, será la solución del sistema. La solución en coordenadas cartesianas puede obtenerse mediante las relaciones (5.9), usualmente esta última transformación es inútil.

Claramente, si las q_i corresponden a las coordenadas cartesianas y no hay restricciones, las ecuaciones de movimiento se reducen a la segunda ley de Newton para las componentes de $\mathbf{r}_i$. Sólo falta especificar las condiciones iniciales.

Cuando el sistema es conservativo, cada fuerza aplicada $\mathbf{F}_i^{(a)}$ se puede escribir como el gradiente de una función potencial, es decir: $\mathbf{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V$ y la fuerza generalizada se convierte en

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Las ecuaciones de movimiento serán ahora,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial \left(T - V\right)}{\partial q_j} = 0 \ ; \ \ j = 1, 2, ..., f \ . \tag{5.25}$$

La función V es sólo función de las coordenadas ($\frac{\partial V}{\partial \dot{q_j}} = 0$), de

tal forma que podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q_j}}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0 \ , \ \ j = 1, 2, ..., f, \qquad (5.26)$$

definimos a la función de Lagrange por medio de la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t) = T - V \qquad (5.27)$$

de tal forma que las ecuaciones de movimiento serán:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial}{\partial q_j}\mathcal{L} = 0 \ , \ \ j = 1, 2, ..., f \ , \qquad (5.28)$$

Estas ecuaciones diferenciales de segundo orden se llaman: ecuaciones de Euler-Lagrange[5] o ecuaciones de movimiento de Lagrange. El orden del sistema de ecuaciones diferenciales es $2f$, lo que era esperable. En este punto deben especificarse las $2f$ condiciones iniciales. La solución a este sistema de ecuaciones que cumpla con las condiciones iniciales es la solución al problema dinámico y esta solución es única.

En este formalismo se logran obtener las ecuaciones de movimiento en cualquier sistema de coordenadas generalizadas y no requiere información alguna sobre las fuerzas de restricción. Es muy fácil probar que si no hay restricciones, estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones de Newton. Las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir para sistemas conservativos (5.28) de igual manera que para sistemas no conservativos (5.23), en esta versión del formalismo lagrangiano las restricciones deben ser holonómicas[6].

[5]Respecto del nombre de estas ecuaciones, se puede encontrar una variedad de nombres para ellas, algunos autores las llaman ecuaciones de Euler-Lagrange, mientras que a las ecuaciones para la energía cinética las llaman ecuaciones de Lagrange. Euler ya había obtenido una descripción equivalente a la de Lagrange [23].

[6]Para una gran variedad de sistemas donde no hay restricciones o éstas

5.5. Ejemplos del método lagrangiano

1. **Bloque sobre un plano inclinado**

Un bloque resbalando por un plano sin fricción; las restricciones son dos y son holonómicas, el número de grados de libertad es uno y el sistema es conservativo. Podemos escoger a la coordenada generalizada como la distancia entre la partícula y el punto superior del plano[7], llamémosle $q_1 = s$, de tal forma que las ecuaciones (5.9) se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} x &= s\ \cos\theta \\ y &= y_0 - s\ sen\theta\ , \end{aligned} \tag{5.29}$$

la energía cinética en esta coordenada es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \tag{5.30}$$

mientras que la energía potencial (sólo es debida a la fuerza aplicada, la de gravedad) en la coordenada generalizada resulta ser

$$V = mg(y - y_0) = -mgs\ \ \text{sen}\theta, \tag{5.31}$$

donde hemos puesto el origen del potencial en $y = y_0$, de tal forma que la función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}, t) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgs\ sen\theta. \tag{5.32}$$

En este caso la lagrangiana (función de Lagrange) no depende del tiempo explícitamente, la ecuación de Lagrange para este

son holonómicas y las fuerzas son derivables de una función potencial, las ecuaciones de movimiento de Newton son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, si existen restricciones no holonómicas, en general, no es posible escribir una función lagrangiana y las ecuaciones de Newton son la única alternativa para describir el movimiento.

[7]Puede escogerse otra coordenada generalizada, por ejemplo: el ángulo que hace la la posición de la partícula medido desde el origen, la distancia que ha caído la partícula desde el punto de partida, etc.

grado de libertad es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0, \ \Rightarrow \ m\ddot{s} - mg \ sen\theta = 0, \tag{5.33}$$

la cual es exactamente la ecuación de movimiento que obtuvimos aplicando la dinámica newtoniana; en este caso no hicimos mención alguna de la fuerza de restricción, la reacción normal al plano. Podemos también calcular la fuerza generalizada:

$$Q_1 = \mathbf{F}_1^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} = -mg\frac{\partial y}{\partial s} = mg \ sen\theta \tag{5.34}$$

tiene dimensiones de fuerza porque la variable generalizada es una longitud. Esta fuerza sustituida en la ecuación (5.23) produce la misma ecuación de movimiento para la coordenada generalizada s. Con este ejemplo sencillo podemos apreciar la utilidad y poder del método de Lagrange para restricciones holonómicas. La fuerza de restricción fue eliminada de la descripción del movimiento; sin embargo, para cierto tipo de restricciones, las fuerzas de restricción también pueden ser conocidas mediante el formalismo lagrangiano (ver capítulo 9). Para este sistema simple, el método de Lagrange parece ser más complicado que el de Newton, sin embargo, para sistemas más complejos en los que la eliminación de las fuerzas de restricción resulta difícil, el método lagrangiano resulta más directo y fácil, ver ejemplos más adelante y ejercicios al final de este capítulo.

2. **Péndulo esférico**

Consideremos el péndulo esférico ilustrado en la figura (5.4.), el punto de soporte está fijo, la cuerda es inextensible y sin masa. Sólo hay una restricción ($k = 1$), que la masa esté siempre a una distancia l del soporte, la restricción es holonómica y esclerónoma y puede escribirse como sigue:

$$f(x, y, z, t) = l^2 - x^2 - y^2 - \left(z^2 - z_0^2\right) = 0. \tag{5.35}$$

El número de grados de libertad es $f = 3n - k = 2$. Las dos coordenadas generalizadas convenientes son $\{q_i\} = \{\theta, \phi\}$ como

se ilustran en la figura. Nótese que en este caso el ángulo θ no es el usual ángulo zenital de las coordenadas esféricas, lo cual en la descripción de Lagrange no tiene ningún efecto, basta con que existan las coordenadas generalizadas y sean independientes. Con estas coordenadas generalizadas las relaciones (5.9) se escriben así:

$$\begin{aligned} x &= l sen\theta \cos\phi, \\ y &= l sen\theta sen\phi, \\ z &= z_0 - l\cos\theta. \end{aligned} \tag{5.36}$$

La energía cinética se puede escribir en términos de las coordenadas generalizadas de la siguiente forma,

$$T(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi},t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2 sen^2\theta), \tag{5.37}$$

mientras que la energía potencial en estas coordenadas es:

$$V(\theta,\phi) = mg(z_0 - l\cos\theta). \tag{5.38}$$

El origen de potencial se ha escogido en el punto donde $\theta = 0$ y se puede escoger $z_0 = l$.

La función de Lagrange es

$$\mathcal{L}(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi},t) = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2 sen^2\theta) - mg(z_0 - l\cos\theta). \tag{5.39}$$

La fuerza de restricción, la tensión en la cuerda, ya ha sido eliminada por el principio de D'Alembert. Las ecuaciones de Lagrange que resultan para los grados de libertad θ y ϕ son:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0; \rightarrow \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - (ml^2\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta - \\ &\qquad\qquad - mgl sen\theta) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0; \rightarrow \frac{d}{dt}(ml^2 sen^2\theta\dot{\phi}) - (0) = 0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Arreglando estas ecuaciones obtenemos que

$$\ddot{\theta} - sen\theta \cos\theta \dot{\phi}^{2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0, \tag{5.41}$$

$$sen^{2}\theta \dot{\phi} = cte = c_1. \tag{5.42}$$

Esta última ecuación proporciona una integral de movimiento y es debida a que la función lagrangiana no depende explícitamente del ángulo ϕ ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$). Estas ecuaciones del movimiento son idénticas a las obtenidas previamente usando las ecuaciones de Newton (compare estas ecuaciones con las ecuaciones (2.173 y 2.174)); de este punto en adelante el tratamiento es equivalente.

3. **Partícula sobre un disco rotando**

Regresemos el ejercicio del capítulo 3 que se ilustra en la figura (3.14.); un disco horizontal rotando sobre su eje vertical con rapidez angular constante Ω, una barra fija al disco, guía a un resorte de constante de restitución k que a su vez sujeta a una partícula de masa m y no hay fricción en el sistema. Hay dos restricciones en el sistema: la partícula permanece en el plano ($z = 0$) y es restringida a rotar con la barra que guía al resorte, las fuerzas de restricción son la reacción de la barra guía que arrastra a la partícula y la reacción del disco que mantiene el movimiento en un plano, las restricciones pueden escribirse así:

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ y - x\tan(\Omega t) &= 0\ . \end{aligned} \tag{5.43}$$

Ambas restricciones son holonómicas y la segunda es reónoma. Sólo es necesario un grado de libertad y lo escogemos como la distancia sobre la barra medida desde el eje de rotación r; con esto podemos escribir las coordenadas cartesianas en términos de la única coordenada generalizada r,

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\Omega t), \\ y &= r\ sen\ (\Omega t), \\ z &= 0. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Las energías cinética y potencial son:

$$T(r,\dot{r},t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2) \ ,$$
$$V(r) = \frac{k}{2}(r-l)^2. \tag{5.45}$$

Donde l es la longitud normal del resorte, la lagrangiana es entonces,

$$\mathcal{L}(r,\dot{r},t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2) - \frac{k}{2}(r-l)^2,$$

y la ecuación de movimiento resulta ser

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0; \ \ \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - (mr\Omega^2 - k(r-l)) = 0. \tag{5.46}$$

Esta ecuación es fácilmente interpretable; observada desde el sistema en rotación (el sistema donde medimos el grado de libertad r), la fuerza tiene dos partes: la fuerza aplicada del resorte $-k(r-l)$ y la fuerza centrífuga $mr\Omega^2$ (fuerza debida a que este sistema de observación no es inercial). En este caso, el hecho de que el sistema de referencia donde está medido el grado de libertad r sea no inercial, está explícitamente contenido en la transformación (5.44), y proporciona a las fuerzas de origen no inercial. La fuerza de Coriolis no aparece porque está balanceada por la fuerza de restricción proporcionada por la barra. La solución de este problema la dejamos como ejercicio para el lector.

4. **Péndulo doble**

Consideremos una partícula de masa m_2 colgando por una cuerda sin masa de longitud L_2 de otra masa m_1, que a su vez cuelga por una cuerda sin masa de longitud L_1 de un soporte fijo en un SIR y el movimiento se efectúa en un plano (escogemos las condiciones iniciales para que esto suceda así). Ambas partículas están sujetas al campo gravitacional terrestre y su movimiento está en un plano vertical (ver figura (5.10.)). Las fuerzas de

restricción son las tensiones de las cuerdas actuando sobre las partículas, mientras que las fuerzas aplicadas son los pesos. Las restricciones se pueden escribir como sigue:

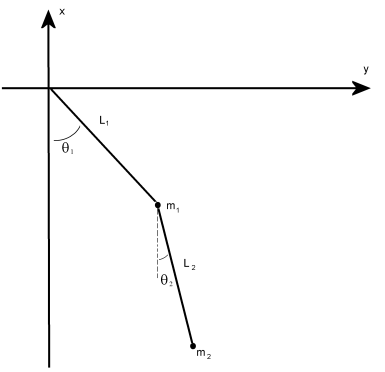

Figura 5.10. Péndulo doble. Dos masas diferentes m_1 y m_2 cuelgan la segunda de la primera y ésta de un soporte fijo.

$$
\begin{aligned}
&z_1 = 0 \ , \\
&z_2 = 0 \ , \\
&L_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \ , \\
&L_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \ .
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Existen cuatro restricciones holonómicas que son esclerónomas; el número de grados de libertad es $f = 3n - k = 2$, las coordenadas generalizadas apropiadas son los ángulos que hacen las cuerdas con la dirección vertical $\{\theta_1, \theta_2\}$ tal como se muestra en la figura. Las coordenadas cartesianas como función de las coordenadas generalizadas se escriben así,

$$
\begin{aligned}
&x_1 = L_1 sen\ \theta_1, && x_2 = L_1 sen\ \theta_1 + L_2 sen\ \theta_2, \\
&y_1 = -L_1 \cos\ \theta_1, && y_2 = -L_1 \cos\ \theta_1 - L_2 \cos\ \theta_2, \\
&z_1 = 0 \ , && z_2 = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{5.48}
$$

Después de hacer las derivadas necesarias podemos escribir la función lagrangiana de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,t) = {} & \dot{\theta}_1^{\,2}\frac{L_1^2}{2}(m_1+m_2)+ \\ & +\dot{\theta}_2^{\,2}(\frac{m_2L_2^2}{2})+ \qquad (5.49)\\ & +\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2L_2L_1\cos(\theta_1-\theta_2))+ \\ & +gL_1\cos\theta_1(m_1+m_2)+ \\ & +gm_2L_2\cos\theta_2). \qquad (5.50)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento que resultan de esta función de Lagrange son:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)L_1^2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2m_2L_2L_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right]- \\ &-\left[-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2L_2L_1\ sen\ (\theta_1-\theta_2))-gL_1(m_1+m_2)\ sen\theta_1\right]=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left[m_2L_2^2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1(m_2L_2L_1\cos(\theta_1-\theta_2))\right]- \\ &-\left[+\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2L_2L_1\ sen\ (\theta_1-\theta_2))-gm_2L_2\ sen\ \theta_2\right]=0.\end{aligned} \qquad (5.51)$$

Estas ecuaciones diferenciales de segundo orden son no lineales y están acopladas, sus soluciones analíticas no han sido posibles. Sin embargo, si consideramos el caso donde las oscilaciones son muy pequeñas, podemos aproximar estas ecuaciones y resolverlas; este tratamiento lo posponemos para el capítulo 8. Por el momento sólo ejemplificamos el método de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento. En este ejemplo se aprecia con claridad el poder del método lagrangiano, invitamos al lector a obtener estas ecuaciones de movimiento usando el método de Newton.

5. **Una cuenta insertada en un aro vertical rotando**

Una cuenta insertada en un aro vertical que rota sobre un eje vertical con rapidez angular constante (ver figura (5.11.)). En este caso hay una partícula y dos restricciones holonómicas ($k = 2$):

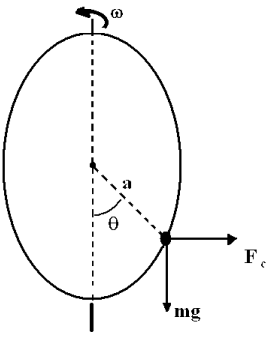

Figura 5.11. Una cuenta de masa m insertada en un aro circular girando sobre un eje vertical con rapidez angular constante.

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 = cte,$$
$$\tan \omega\ t = \frac{y}{x} \qquad , \qquad \omega = cte \tag{5.52}$$

el ángulo azimutal cambia homogéneamente con el tiempo, $\phi = \omega t$. El número de grados de libertad es entonces $f = 3n - k = 1$; la coordenada generalizada apropiada para este caso es el ángulo θ. Con esta selección las coordenadas cartesianas se escriben como sigue:

$$x = a\ sen\ \theta \cos \omega\ t\ ,$$
$$y = a\ sen\ \theta\ sen\ \omega\ t,$$
$$z = a\ \cos\ \theta\ . \tag{5.53}$$

La energía cinética se puede escribir fácilmente,

$$T(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{2}\omega^2 sen^2\theta\ ), \tag{5.54}$$

la energía potencial es la del campo gravitacional $-mga\cos\theta$, con el origen del potencial en $\theta = \pi/2$ el segundo término corresponde al potencial debido a la fuerza inercial. De esta forma la función de Lagrange queda como sigue:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 sen^2\theta\ ) + mga\cos\theta. \tag{5.55}$$

La ecuación de movimiento (5.28) para este grado de libertad es:

$$\ddot{\theta} - (\omega^2 sen\theta\cos\theta - \frac{g}{a}\ sen\ \theta) = 0. \tag{5.56}$$

Esta ecuación se interpreta fácilmente, la aceleración tangencial $a\ddot{\theta}$ se debe a la proyección sobre la tangente de la aceleración del campo gravitacional $g\ sen\ \theta$ que tiende a llevar a la partícula al punto más bajo en el aro, y a la proyección tangencial de la aceleración centrífuga (no inercial) $(a\omega^2 sen\theta)\cos\theta$ que tiende a llevar a la partícula al punto más alejado del eje de rotación; nótese que si el sistema de coordenadas seleccionado es el de un sistema inercial, las fuerzas inerciales están correctamente tomadas en cuenta. Esta ecuación diferencial no tiene solución analítica. Un análisis del potencial efectivo, la suma del potencial centrífugo y del potencial gravitacional,

$$V(\theta) = -\frac{ma^2}{2}\omega^2 sen^2\theta - mga\cos\theta,$$

muestra que tiene un mínimo y para pequeñas oscilaciones en torno a ese mínimo esas oscilaciones pueden ser resueltas analíticamente. El análisis de este movimiento se deja como ejercicio al lector.

6. **Péndulo en un sistema no inercial**

Consideremos el caso del péndulo simple moviéndose en un plano y cuyo punto de suspensión se desplaza verticalmente con aceleración constante a (ver figura (5.12.)). En este caso las restricciones son dos:

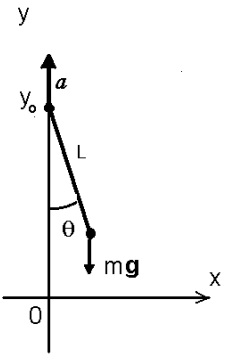

Figura 5.12. Un péndulo simple se monta sobre un soporte que se mueve aceleradamente en la dirección vertical.

$$\begin{aligned} z &= z_0 = cte \\ x^2 &+ (y - y_0(t))^2 = L^2. \end{aligned} \tag{5.57}$$

El punto de suspensión tiene el siguiente movimiento,

$$y_0(t) = h + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2. \tag{5.58}$$

Ambas restricciones son holonómicas y la segunda es reónoma; el único grado de libertad que queda lo podemos identificar por el ángulo θ que hace la cuerda con la vertical. Las coordenadas cartesianas se pueden escribir en términos de esta coordenada generalizada así,

$$\begin{aligned} x &= L \text{ sen } \theta \\ y &= h + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}at^2 - L\cos\theta, \end{aligned} \tag{5.59}$$

las energías cinética y potencial se pueden escribir en términos

de la coordenada generalizada de la siguiente manera:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{5.60}$$

$$T = \frac{m}{2}(L^2\dot{\theta}^2 + v_{y0}^2 + a^2t^2 + 2v_{y0}at + 2Lat\dot{\theta}\text{sen}\theta) \tag{5.61}$$

$$V = mgy = mg(h + v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2 - L\cos\theta). \tag{5.62}$$

La lagrangiana es entonces $\mathcal{L} = T - V$ y la ecuación de movimiento que resulta al aplicar las ecuaciones de Lagrange es

$$\ddot{\theta} + \frac{a+g}{L}\text{sen }\theta = 0.$$

Este resultado era esperado (ver ejercicio en el capítulo 3), corresponde a un péndulo que sube con aceleración a en un campo gravitacional homogéneo de aceleración g nótese que la fuerza de origen no inercial está correctamente tomada en cuenta en la transformación de coordenadas. Para oscilaciones pequeñas, la frecuencia de oscilación cambia porque el peso efectivo cambia a $m(g+a)$. Nótese que la fuerza de origen inercial está tomada en cuenta apropiadamente por la transformación de coordenadas de la ecuación (5.59).

5.6. Potenciales generalizados

Existen algunos casos en los que la fuerza no puede escribirse como el gradiente de una función potencial dependiente de las coordenadas generalizadas (potencial escalar), sin embargo, existen varios tipos de fuerzas que dependen de las velocidades que se pueden escribir en términos de una función potencial generalizada. Consideremos una función dependiente de las velocidades, $U\left(q_i, \dot{q}_i; t\right)$ tal que las fuerzas del sistema se puedan escribir como sigue,

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}; \quad j = 1, 2, ..., f, \tag{5.63}$$

en este caso las ecuaciones (5.23) se pueden escribir nuevamente como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \tag{5.64}$$

$$\mathcal{L} = T - U, \tag{5.65}$$

a la función U se le llama potencial generalizado o potencial dependiente de la velocidad[8].

Un ejemplo importante de estos potenciales es el caso de una partícula cargada, en un campo electromagnético, descrito por los campos vectoriales eléctrico $\mathcal{E}$ y de inducción magnética $\mathbf{B}$. La fuerza en este caso es la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = e\left(\mathcal{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \tag{5.66}$$

Aquí denotamos a la carga por e en lugar de la notación usual q (para evitar confusión con las coordenadas generalizadas), c es la velocidad de la luz en el vacío y $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de estos campos son las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho & , & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & , & \nabla \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \tag{5.67}$$

donde ρ es densidad de carga, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente; mientras que $\mathbf{D} = \epsilon\mathcal{E}$ es el vector de desplazamiento eléctrico y $\mathbf{B} = \mu\mathcal{H}$ es la relación con el campo magnético $\mathcal{H}$[9].

Esta fuerza (dependiente de la velocidad), no puede escribirse como el gradiente de una función de las coordenadas. Sin

[8] No todas las fuerzas dependientes de la velocidad pueden escribirse así; aún para aquellas que sí es posible, se requiere habilidad para encontrar dicha función U (véase el ejemplo en esta sección y ejercicios al final del capítulo).

[9] En esta forma de escribir las ecuaciones de Maxwell estamos usando el sistema CGS de unidades; en el sistema internacional de unidades (SI) las ecuaciones toman la forma: $\nabla \cdot \mathcal{E} = \rho/\epsilon$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ y $\nabla \times \mathbf{H} = \mu\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$; mientras que la fuerza de Lorentz es $\mathbf{F} = e\left(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$.

embargo, ya que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos escribir

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.68}$$

con $\mathbf{A}$ el potencial vectorial magnético. Usando la ley de Faraday podemos escribir que

$$\begin{array}{l} \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \left(\mathcal{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right) = 0 \ , \end{array} \tag{5.69}$$

y de esto se puede escribir de la siguiente forma :

$$\mathcal{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = -\ \nabla\phi \tag{5.70}$$

con ϕ el potencial escalar. De esta forma, la fuerza de Lorentz en términos de los potenciales: vectorial $\mathbf{A}$ y escalar ϕ toma la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = e\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right), \tag{5.71}$$

cuya componente x es,

$$F_x = e\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right)_x\right); \tag{5.72}$$

además, la componente $(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x$ es

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \tag{5.73}$$

sumando y restando el término $v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}$ tenemos que,

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{5.74}$$

donde hemos puesto que

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}, \tag{5.75}$$

sustituyendo la ecuación (5.74) en la (5.72), la componente x de la fuerza se escribe como sigue:

$$F_x = e\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)\right\}. \tag{5.76}$$

En esta última expresión hemos usado el hecho de que ϕ no depende de las componentes de la velocidad. Podemos efectuar un proceso análogo para las componentes y y z. Finalmente, la fuerza electromagnética resulta de la siguiente forma,

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \qquad\qquad q_i = x,\, y,\, z, \tag{5.77}$$

donde la función U toma la forma

$$U = e\phi - \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \tag{5.78}$$

con la correspondiente función lagrangiana:

$$\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i;\, t\right) = T - e\phi + \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \quad . \tag{5.79}$$

Las ecuaciones de movimiento de este sistema serán las ecuaciones de Euler-Lagrange para una partícula en un campo electromagnético. Esta función potencial reproduce las componentes de la fuerza de Lorentz, ecuación (5.66).

Ejemplo. Supongamos una partícula con carga e y masa m que se encuentra en una región donde hay un campo magnético homogéneo en la dirección z, *i.e.*, $\mathbf{B} = B_0\widehat{u}_z$. y un campo eléctrico también homogéneo en la dirección z, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\widehat{u}_z$. La fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza de Lorentz (5.66). Los potenciales electromagnéticos para este caso pueden obtenerse fácilmente:

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= -\mathcal{E}_0 z, \\ \mathbf{A}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r} = (-\frac{B_0}{2}y, \frac{B_0}{2}x, 0). \end{aligned} \tag{5.80}$$

La lagrangiana para este sistema (ver ecuación (5.79)) resulta ser

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\mathcal{E}_0 z - \frac{eB_0}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) \ . \tag{5.81}$$

Las ecuaciones de movimiento que resultan de esta lagrangiana son las mismas que las que obtuvimos usando la segunda ley de Newton en el capítulo 2 (ver ecuación (2.189)).

5.7. Función de disipación

Es muy frecuente encontrar sistemas en donde existen fuerzas de fricción proporcionales a la velocidad de las partículas, como es el caso de la fricción entre una partícula y un fluido:

$$F_x^{(f)} = -b_x v_x \ , \tag{5.82}$$

en este caso es posible introducir la llamada función de disipación de Rayleigh[14], que en el caso de n partículas resulta ser:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(b_x v_{ix}^2 + b_y v_{iy}^2 + b_z v_{iz}^2\right) \tag{5.83}$$

de tal forma que

$$F_{ix}^{(f)} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \ \ ; \ \ \mathbf{F}_i^{(f)} = -\nabla_{v_i}\mathcal{F}$$

y la fuerza generalizada debida a este tipo de fricción es:

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{v_i}\mathcal{F}\cdot\frac{\partial\, \mathbf{r}_i}{\partial\, q_j} \ ; \qquad Q_j = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{v_i}\mathcal{F}\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \tag{5.84}$$

Para la segunda igualdad hemos usado la ec (5.18), la última ecuación se reduce a

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \ . \tag{5.85}$$

La función de disipación resulta ser el doble del trabajo por unidad de tiempo hecho por la fuerza de fricción (ver ejercicio al final de este capítulo), de ahí el nombre de función de disipación.

Forma mas general de las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de movimiento para sistemas con restricciones holonómicas en su forma más general son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \;\; ; \;\; j = 1,\, 2, ...,\, f \;, \tag{5.86}$$

donde la lagrangiana es

$$\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i,\, t\right) = T - U\,; \tag{5.87}$$

con las siguientes definiciones:

U es el potencial incluyendo a los potenciales generalizados y escalares,
T energía cinética del sistema de las partículas,
$\mathcal{F}$ es la función de disipación de Rayleigh, y
Q son las fuerzas generalizadas que no aceptan alguna de las opciones anteriores..

5.8. Energía cinética

La energía cinética T se ha escrito en términos de las coordenadas generalizadas del sistema que se desea describir, algunas propiedades del sistema que se describe están contenidas en la forma de esta función. Analicemos la forma que adopta dicha función, para ello consideremos la transformación de coordenadas cartesianas a generalizadas (ecuación (5.14)), usaremos la notación abreviada $G\left(q, \dot{q}, t\right)$ para identificar al término

$G\left(q_1, q_2; ..., q_f, \dot{q_1}, \dot{q_2}, ..., \dot{q_f}, t\right)$, escribiendo la energía cinética como sigue:

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \\ \cdot \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right), \tag{5.88}$$

efectuando el producto obtenemos que

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right) + \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \\ + \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \ , \tag{5.89}$$

en términos de las velocidades generalizadas toma la forma siguiente,

$$T = a_0 + \sum_{j=1}^{f} a_j \dot{q}_j + \sum_{jk}^{f} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \tag{5.90}$$

Es, en general, una forma bilineal en las velocidades generalizadas. Los coeficientes a_0, a_j, a_{jk} en la expresión (5.89), son llamados coeficientes de inercia; dependen de las masas de las partículas y de la transformación a coordenadas generalizadas, *i.e.*, de la geometría de la transformación. Es importante señalar aquí, que sólo en el caso de restricciones esclerónomas $\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0\right)$ la forma de la energía cinética es una función cuadrática homogénea en las velocidades,

$$T = \sum_{,jk}^{f} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \tag{5.91}$$

Los coeficientes a_0, a_j, a_{jk} suelen depender de las coordenadas y del tiempo, contribuyendo a diversos términos en las ecuaciones de Lagrange; en algunos casos sencillos estos términos pueden interpretarse como parte de las fuerzas no inerciales que están contenidos en la transformación de coordenadas (ver ejemplos de la sección anterior). El resultado que interesa destacar es que: si las restricciones son esclerónomas la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las velocidades, propiedad que usaremos mas adelante.

5.9. No unicidad de la función lagrangiana

Es importante señalar también, que la función lagrangiana no es única. Equivalentemente: para un sistema específico existen muchas funciones lagrangianas, que arrojan el mismo conjunto de ecuaciones de movimiento y que representan igualmente a la dinámica del sistema. Consideremos una función $\mathcal{L}^{'}$ definida por:

$$\mathcal{L}^{'} = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\phi\left(q_1, ..., q_f, t\right) \tag{5.92}$$

con ϕ una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo y consideremos el siguiente conjunto de operadores diferenciales:

$$O_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \ , \ \ i = 1, 2, ..., f \tag{5.93}$$

tales que:

$$O_i\mathcal{L}^{'} = O_i\mathcal{L} + O_i\frac{d}{dt}\phi\left(q, t\right) \ , \ i = 1, 2, ..., f \ . \tag{5.94}$$

Si $\mathcal{L}$ satisface las ecuaciones de Lagrange, entonces tendremos que:

$$O_i\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathcal{L} = 0, \tag{5.95}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} O_i\mathcal{L}' &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\phi\left(q,t\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\phi\left(q,t\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial\phi}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\phi\left(q,t\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_i} - \frac{\partial\phi}{\partial q_i}\right) = 0\ ; \end{aligned} \tag{5.96}$$

en otras palabras,

$$O_i\mathcal{L}' = 0\ ;\ i = 1,\, 2,\, ...,\, f \tag{5.97}$$

$\mathcal{L}'$ satisface las mismas ecuaciones de movimiento que $\mathcal{L}$. Dinámicamente las funciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son indistinguibles. La función de Lagrange no es única pero las ecuaciones de movimiento sí lo son.

5.10. Simetrías y teoremas de conservación

La formulación lagrangiana permite obtener fácilmente las ecuaciones de movimiento para el caso de restricciones holonómicas y también puede ayudar a encontrar integrales de movimiento (o constantes de movimiento). Supongamos las siguientes funciones dinámicas:

$$G_l(q,\dot{q},t) = G_l\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f; t\right) = cte, \qquad l = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.98}$$

Y que corresponden a cantidades conservadas G_l, estas constantes dependerán de las condiciones iniciales del sistema, (ver la sección 4.4). Estas constantes pueden usarse en la solución de un problema de varias formas; por ejemplo, de estas l funciones podemos eliminar el mismo número de variables, velocidades o

coordenadas y con esto disminuir el número de variables por determinar o el orden de la ecuación diferencial de alguna de las coordenadas. También, mediante estas integrales de movimiento podemos conocer algunas propiedades dinámicas del sistema sin necesidad de resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales. En esta sección señalaremos sólo tres de las más importantes integrales de movimiento conocidas en la mecánica clásica las cuales ya hemos descrito anteriormente (ver capítulo 4): el momento lineal , el momento angular y la energía.

Consideremos primero la generalización de la definición del momento cartesiano para un sistema de partículas puntuales, libres y sin restricciones; su lagrangiana en coordenadas cartesianas será simplemente su energía cinética:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i^{\,2} + \dot{y}_i^{\,2} + \dot{z}_i^{\,2} \right),$$

y de ella obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix} \ . \tag{5.99}$$

En general para cualquier sistema dinámico caracterizado por su lagrangiana, podemos definir el *momento generalizado que también llamaremos canónico* asociado a la coordenada generalizada q_j:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \tag{5.100}$$

este momento generalizado no corresponde necesariamente a un momento lineal, sus dimensiones son las de energía / (dimensiones de $\dot{q}_j$). Tomemos como ejemplo el caso de una partícula cargada en un campo electromagnético, el cual tiene la siguiente lagrangiana en el sistema CGS de unidades,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^{\,2} - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \tag{5.101}$$

con ϕ el potencial escalar eléctrico y $\mathbf{A}$ el potencial vectorial magnético (ver ecuación 5.79), resulta entonces que el momento generalizado de una partícula cargada en un campo electromagnético toma la forma

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x, \tag{5.102}$$

esto es, el momento generalizado es el momento cartesiano más un momento asociado al campo magnético $\frac{e}{c}A_x$.

Consideremos a la función lagrangiana de un sistema, tal que una coordenada, digamos q_i, no aparece en ella, tendremos así que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \tag{5.103}$$

a q_i se le llama coordenada cíclica o ignorable; las ecuaciones de Lagrange nos conducen a que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \ ; \ \frac{dp_i}{dt} = 0 \tag{5.104}$$

o bien

$$p_i = p_i\left(q, \dot{q}, t\right) = \ cte,$$

y de aquí el siguiente teorema:

Teorema de conservación del momento generalizado:

Si una variable generalizada es cíclica (ignorable) el momento generalizado asociado a esta variable, es una integral de movimiento.

Este teorema incluye a los teoremas de conservación del momento angular y del momento lineal, es más general que éstos, y nos permite relacionar a las constantes de movimiento con las simetrías del sistema. Para demostrar esto, consideremos un sistema en el cual las fuerzas se obtienen de una función escalar $V\left(q_i\right)$ dependiente sólo de las coordenadas y que q_i es una

coordenada ignorable; en estas condiciones las ecuaciones de Lagrange nos conducen a que

$$\dot{p_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j. \tag{5.105}$$

Dos son los casos interesantes de esta relación:

1) q_j es una coordenada longitudinal., Consideremos entonces la traslación dq_j en esta coordenada (ver figura (5.13.)), caracterizada por la dirección $\mathbf{n}$, observamos que

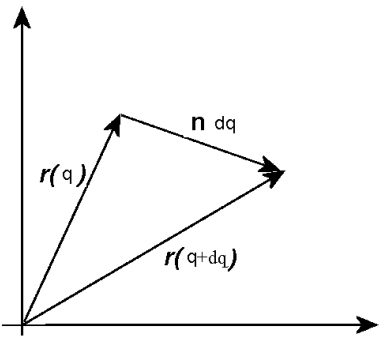

Figura 5.13. Variación del vector de posición $\mathbf{r}$ ante un cambio infinitesimal de la coordenada longitudinal q.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\mathbf{r}_i\left(q_j + dq_j\right) - \mathbf{r}_i\left(q_j\right)}{dq_j} = \frac{\mathbf{n}dq_j}{dq_j} = \mathbf{n}\ .$$

El momento generalizado asociado a la coordenada q_j resulta ser,

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}, \tag{5.106}$$

aquí hemos usado la propiedad de la ecuación 5.18; la fuerza generalizada se convierte en:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \mathbf{n} \tag{5.107}$$

las ecuaciones de movimiento nos proporcionan la siguiente igualdad,

$$\frac{d}{dt} p_j = \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{n} \right] = Q_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \right) \cdot \mathbf{n} \ , \tag{5.108}$$

si q_j es una coordenada ignorable en $\mathcal{L}$, $\left(Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \right)$ tendremos que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ (la componente a lo largo de $\mathbf{n}$ del *momento lineal total*) es una constante. Esto es exactamente el teorema de conservación del momento lineal. Más aún, si la lagrangiana no depende de la variable longitudinal q_j, significa que es invariante ante traslaciones por dq_j.

$$\mathcal{L}(q_j) = \mathcal{L}(q_j + dq_j).$$

Equivalentemente: si la dinámica del sistema, contenida en $\mathcal{L}$, es invariante ante traslaciones en la coordenada generalizada q_j, entonces el momento generalizado p_j (componente del momento lineal en la dirección del vector $\mathbf{n}$) se conserva, es una integral de mjovimiento.

2) La variable q_j como una coordenada angular, dq_j es una rotación cuyo eje de rotación está definido por la dirección $\mathbf{n}$ (ver figura 5.14.), en este caso el cambio en $\mathbf{r}_i$ por la rotación es:

$$\begin{aligned} |d\mathbf{r}_i| &= |\mathbf{r}_i| \ sen\theta dq_j \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| &= |\mathbf{r}_i| \, sen\theta \ , \end{aligned} \tag{5.109}$$

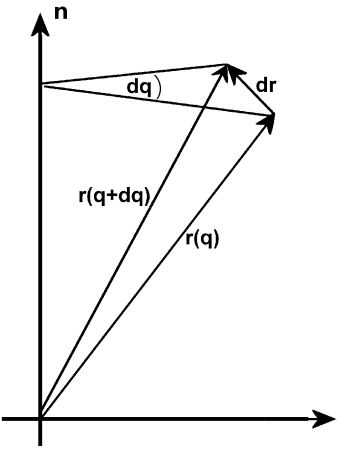

Figura 5.14. Cambio producido en el vector de posición por la rotación dq_j.

y en forma vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \tag{5.110}$$

sustituyendo en la ecuación (5.106) obtenemos que:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}^{(i)} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{total} \tag{5.111}$$

mientras que la ecuación (5.107) se convierte en:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_{total}^{(a)} \ , \tag{5.112}$$

p_j es la proyección del momento angular total en la dirección de $\mathbf{n}$ mientras que Q_j es la proyección del momento de la fuerza (torque) total en la dirección $\mathbf{n}$; si q_j es cíclica, $Q_j = 0$ y el momento de la fuerza $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0$. La componente de $\mathbf{L}$ a lo largo de $\mathbf{n}$ es una constante (integral de movimiento). Este es

exactamente el teorema de conservación del momento angular. Más aún, si la lagrangiana no depende de la variable angular q_j, significa que es invariante ante rotaciones por dq_j.

$$\mathcal{L}(q_j) = \mathcal{L}(q_j + dq_j).$$

Equivalentemente: si la dinámica del sistema, contenida en $\mathcal{L}$, es invariante ante rotaciones en la coordenada generalizada q_j, entonces el momento generalizado p_j (la componente del momento angular en la dirección del vector $\mathbf{n}$ que define la rotación) se conserva, es una integral de movimiento.

En resumen: Los teoremas de conservación del momento lineal y angular están contenidos en este teorema, y corresponden al hecho de que una coordenada generalizada longitudinal o angular respectivamente, no esté presente en la lagrangiana.

Este teorema es más general; por ejemplo, consideremos la lagrangiana de una partícula en un campo electromagnético, cuyo momento generalizado es

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x, \tag{5.113}$$

éste no es simplemente el momento cartesiano $m\dot{x}$, si la lagrangiana del sistema no depende de la variable x, entonces $p_x = cte$, a pesar de que $m\dot{x}$ no lo sea (no debe confundirse al momento generalizado p_x en la dirección x, con el momento cartesiano $m\dot{x}$).

Del teorema anterior podemos obtener aún más información; si q_j es cíclica,

$$\mathcal{L}\left(q_j + dq_j\right) = \mathcal{L}\left(q_j\right), \tag{5.114}$$

la función lagrangiana es invariante ante un cambio en una coordenada ignorable. A esta invariancia le llamaremos simetría dinámica . Si la lagrangiana es invariante ante una rotación dq_j el momento generalizado (componente del momento angular asociado a la coordenada q_j) es una constante de movimiento.

Si la lagrangiana es invariante ante una traslación dq_j el momento generalizado (componente del momento lineal asociado a la coordenada q_j) es una constante de movimiento. Para coordenadas generalizadas que no sean ángulos o longitudes pueden existir leyes de conservación particulares.

Por último, consideremos la derivada total de la lagrangiana $\mathcal{L}$ con respecto del tiempo,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \tag{5.115}$$

usando las ecuaciones de Lagrange podemos sustituir el término

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \tag{5.116}$$

y simplificamos la ecuación (5.115) a,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{j}^{f} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \tag{5.117}$$

o bien

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{5.118}$$

y agrupando las derivadas respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j p_j \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{5.119}$$

Si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, tendremos que la nueva función

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = cte \tag{5.120}$$

La función H se llama función de Hamilton o hamiltoniana. La ecuación (5.119) nos proporciona un teorema de conservación:

Si la función lagrangiana no contiene al parámetro tiempo explícitamente, el tiempo es ignorable, la función de Hamilton H es una integral de movimiento.

Este teorema contiene como caso particular el teorema de conservación de la energía, bajo las siguientes condiciones:

a) fuerzas derivables de una función potencial dependiente sólo de las coordenadas generalizadas.

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.121}$$

b) relaciones de transformación $\mathbf{r}(q,t)$ (ver ecuación (5.90)) independientes del tiempo, en este caso

$$T = \sum_{jk} a_{jk}\left(q\right) \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

es una función cuadrática homogénea en $\dot{q}_k$, de tal forma que

$$\sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T, \tag{5.122}$$

cuando las fuerzas son derivables de un potencial escalar, dependiente sólo de las coordenadas,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}.$$

Bajo estas condiciones la función hamiltoniana se convierte en

$$H = 2T - \mathcal{L} = 2T - T + V = T + V,$$

esto es,

$$H = E = cte, \tag{5.123}$$

es la energía mecánica total. En otras palabras, cuando la función de Lagrange no depende explícitamente del tiempo la hamiltoniana se conserva. Para algunos sistemas que satisfacen los incisos a) y b) esta función se reduce a la energía mecánica total. Existen sistemas mecánicos para los cuales la energía mecánica total no puede definirse; aún así, existe una función $H(q, p, t)$. Si la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo esta función se convierte en una integral de movimiento. Un ejemplo de este caso es una partícula en un campo electromagnético en el cual no se puede definir a la función escalar $V(q)$, si los campos electromagnéticos no dependen del tiempo, la función de Hamilton es integral del movimiento, *i.e.*, se conserva[10]. Si la función hamiltoniana se conserva significa que la correspondiente función lagrangiana es invariante ante traslaciones en el tiempo. Es decir, la dinámica del sistema representada por la función $\mathcal{L}$ es invariante ante traslaciones temporales y la simetría relacionada es la traslación temporal, esto significa que el origen del tiempo, parámetro t, es arbitrario para dicho sistema.

5.11. Ecuaciones de Hamilton

Analicemos las propiedades de la función de Hamilton, comencemos definiendo al espacio fase: el espacio fase está definido por las $2f$ variables q_i, p_i, es el espacio donde está definida la función de Hamilton. Consideremos al conjunto $(2f)$ de variables $(q_i,\ p_i)$ como variables independientes (en lugar de las variables $q_i, \dot{q}_i$de la lagrangiana), $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ es el momento canónico asociado con la coordenada generalizada q_i. Transformamos a la nueva función $H\,(q, p, t)$ dependiente de todas las coordenadas y momentos generalizados q_i , p_i y posiblemente del tiempo;

[10]Frecuentemente se encuentra en la bibliografía que a esta función se le llama la energía, sin embargo, tiene un sentido más general que el de energía mecánica total. En la teoría cuántica a esta función se le define como la energía.

esta transformación es sugerida directamente por la forma del momento generalizado $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$; mediante una transformación de Legendre entre p_i y $\dot{q}_i$. Definimos a esta transformación de Legendre así:

$$H\left(q,p,t\right) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\left(q,\dot{q},t\right). \tag{5.124}$$

Diferenciando a esta función, por su dependencia en las variables q y p, obtenemos que

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \tag{5.125}$$

de la definición en la ecuación (5.124) obtenemos también que

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^{f} p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \tag{5.126}$$

estas dos últimas expresiones deben ser idénticas para toda dq_i y dp_i, variables independientes. Usando las ecuaciones de Lagrange y la definición del momento generalizado $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ nos produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i; & i &= 1,2,...,f \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i; & i &= 1,2,...,f \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.127}$$

Estas ecuaciones son las *ecuaciones canónicas o ecuación de movimiento de Hamilton*[11]. Las ecuaciones que proporciona son

[11] Fue Jacobi el que introdujo el nombre canónico, vocablo proveniente del latín que significa regular.

también ecuaciones de movimiento para el mismo sistema mecánico, éstas presentan la ventaja de ser ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo. Para ilustrar el método de Hamilton consideremos un problema simple, el oscilador armónico; en este caso es muy fácil encontrar su función de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^{2} - \frac{k}{2}x^{2}, \tag{5.128}$$

el momento generalizado coincide con el momento cartesiano

$$p_x = m\dot{x}, \quad , \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}.$$

De esta forma obtenemos a la función de Hamilton eliminando a la velocidad generalizada $\dot{x}$, en términos del momento generalizado p_x

$$H(x,p_x,t) = p_x\dot{x} - \mathcal{L}(x,\dot{x},t) = p_x\frac{p_x}{m} - \left(\frac{m}{2}\left(\frac{p_x}{m}\right)^{2} - \frac{k}{2}x^{2}\right), \tag{5.129}$$

resultando que

$$H(x,p_x,t) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2}x^{2}. \tag{5.130}$$

Es muy fácil probar que ésta es la energía mecánica total del oscilador armónico y se conserva por el hecho de que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo. Si aplicamos las ecuaciones de movimiento de Hamilton, ecuaciones (5.127) a esta función hamiltoniana, obtenemos que

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} & \rightarrow & \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}, \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} & \rightarrow & \frac{\partial H}{\partial x} = kx = -\dot{p}_x, \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} & \rightarrow & \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \rightarrow \quad H = cte. \end{array} \tag{5.131}$$

Combinando la primera y la segunda de estas ecuaciones obtenemos un resultado familiar, la segunda ley de Newton para el oscilador.

$$m\ddot{x} = -kx\ . \tag{5.132}$$

La tercera de las ecuaciones nos dice que la hamiltoniana de este sistema se conserva. Además, esta función corresponde a la energía debido a que la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las velocidades y que la función potencial es sólo función de las coordenadas. En el capítulo 9 haremos un estudio más profundo de este tema. Mostraremos ahí, el gran poder y la belleza matemática del formalismo canónico.

5.12. Ejercicios

1. Calcule y dibuje las componentes del desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ para:

   a) Una partícula en el interior de un tazón esférico.

   b) Una cuenta insertada en un alambre plano de forma $y = f(x)$.

   c) Una partícula deslizándose sobre un plano inclinado.

   Muestre que la fuerza de restricción no hace trabajo virtual.

2. Escriba la energía cinética en coordenadas generalizadas para una partícula con el número de grados de libertad y las coordenadas generalizadas siguientes:

   a) $f = 3$, coordenadas esféricas;

   b) $f = 3$, coordenadas cilíndricas;

   c) $f = 2$, coordenadas elípticas;

   d) $f = 2$, coordenadas hiperbólicas.

3. Escriba la función lagrangiana y las ecuaciones de movimiento para los siguientes sistemas:

   a) Una cuenta insertada en un aro circular horizontal plano que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado.

   b) Un péndulo simple cuyo punto de suspensión está en el techo de un vagón de ferrocarril que se acelera uniformemente en la dirección horizontal.

   c) El péndulo triple.

   d) Dos partículas en un plano unidas por un resorte.

e) Dos partículas que interactúan por campo central, es decir,

$$\mathbf{F}_{12} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,/\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\,.$$

4. Resuelva las ecuaciones de Lagrange para la cuenta insertada en una barra fija a un disco rotando en un plano con velocidad angular Ω constante, la barra guía a un resorte de constante de restitución k que sujeta a la partícula, desprecie la fricción, identifique las posibles fuerzas de origen no inercial.

5. Dos péndulos están acoplados por un resorte de constante de restitución k (ver (figura (5.15.)), la longitud normal del péndulo es L_0, obtenga las ecuaciones de movimiento y haga la aproximación para oscilaciones pequeñas.

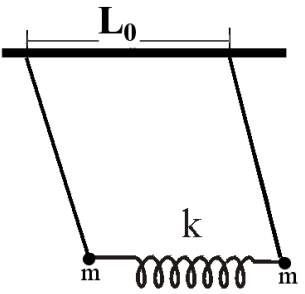

Figura 5.15. Dos péndulos iguales están acoplados por un resorte de constante de restitución lineal k.

6. Una cuenta de masa m se inserta en un alambre delgado de forma elíptica de semiejes a y b, colocado verticalmente

en presencia de un campo gravitacional homogéneo de aceleración g apuntando en la dirección vertical hacia abajo, entre el alambre y la cuenta no hay fricción; en el vértice inferior de la elipse se le proporciona a la partícula una velocidad tangencial v_0. Escriba las ecuaciones de movimiento, analice el movimiento.

7. Si la fuerza sobre una partícula en el grado de libertad x es $F = 2ax\dot{x}^2 + 2ax^2\ddot{x}$, ¿cuál es el potencial generalizado asociado a esta fuerza?

8. Demuestre que el trabajo por unidad de tiempo hecho por la fuerza de fricción $\mathbf{F}^{(f)} = (-b_x v_x, -b_y v_y, -b_z v_z)$, es el doble de la función de disipación de Rayleigh.

9. Demuestre que la lagrangiana de la ecuación (5.101) reproduce apropiadamente la fuerza de Lorentz.

10. A la lagrangiana del problema 5-3d añada el término $\Phi(r, \dot{r}, t) = \cos(kr)\dot{r} - (kr)\dot{r}\,\mathrm{sen}(kr)$, obtenga las nuevas ecuaciones de movimiento y demuestre que no cambian, ¿Por qué? ¿ Qué tipo de función es la que se añade?

11. Considere el péndulo esférico, obtenga los momentos generalizados. Eliminando a las velocidades generalizadas, obtenga la hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton para este sistema. Demuestre que son equivalentes a las ecuaciones de movimiento que se obtienen por medio de la segunda ley de Newton y por el método de Lagrange.

12. En el problema anterior demuestre que la hamiltoniana se conserva y que corresponde a la energía. Obtenga una expresión para la energía mecánica total.

13. Una transformación de norma para el campo magnético se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi,$$

A es el potencial vectorial magnético y la función escalar χ se llama la norma; el campo magnético es invariante ante esta transformación de norma. De tal forma que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'.$$

Para un campo magnético uniforme en la dirección z, $\mathbf{B} = B_0\widehat{k}$, los potenciales vectoriales se pueden escribir como sigue:

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y\widehat{i} + x\widehat{j}) \ (norma\ simétrica)$$

$$\mathbf{A}' = B_0(-y\widehat{i}) \qquad (norma\ de\ Landau)$$

a) encuentre la función χ que conecta estos dos potenciales magnéticos.

b) Demuestre que para estos dos potenciales magnéticos las ecuaciones de Lagrange producen las mismas ecuaciones de movimiento.

14. Demuestre que la función de Hamilton para una partícula en un campo electromagnético es

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi$$

donde **p** es el momento generalizado en coordenadas cartesianas, **A** es el potencial vectorial magnético y ϕ es el potencial escalar eléctrico. Demuestre que las ecuaciones de movimiento de Hamilton reproducen la fuerza de Lorentz.

6

CAMPO CENTRAL

El problema del campo central fue muy importante desde el punto de vista histórico, la solución de Newton al problema del movimiento planetario dió a su teoría un valor universal, demostrando una excelente concordancia con las observaciones astronómicas, además, la teoría poseía una gran capacidad predictiva, en particular, la predicción del retorno del cometa de Halley fue muy impactante en esa época. En este capítulo usaremos el método de Lagrange para estudiar el movimiento de dos partículas que interaccionan por fuerzas conservativas que dependen sólo de la distancia entre ellas, $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, en particular presentaremos la solución de Newton para el movimiento planetario. Mostraremos que cualquier potencial central es soluble hasta una integral definida y que para algunos casos particulares puede escribirse en términos de funciones conocidas. En el formalismo de Lagrange: usaremos los teoremas de conservación para el momento lineal, el momento angular y la energía para reducir el estudio al de un solo grado de libertad; analizaremos las curvas del potencial efectivo para el problema reducido de un cuerpo; resolveremos el caso gravitacional llamado el problema de Kepler. Obtendremos una demostración para las tres leyes, originalmente empíricas, de Kepler; estudiaremos el caso de las órbitas circulares estables e introduciremos una integral de movimiento específica del potencial gravitacional, el vector de Laplace-Runge-Lenz. Estudiaremos también la dispersión de partículas cargadas por el campo central electrostático (dispersión de Rutherford). Las lecturas recomendadas en este tema

son: [1, 2, 4, 5, 7, 12, 13, 17, 19].

6.1. Integrales de movimiento

Para el problema de dos partículas interaccionando por un campo central, en el cual la fuerza entre las partículas satisface la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ y la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que une las partículas, la función potencial se puede escribir como sigue:

$$V = V(r), \tag{6.1}$$

donde r es la distancia entre las partículas, la magnitud del vector $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, es frecuente encontrar una defineión equivalente para el vector de posición relativo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, esta definición no causa ninguna diferencia importante en la descripción subsecuente. De esta manera la función de Lagrange se escribe así,

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, t\right) = T - V(r), \tag{6.2}$$

este problema tiene seis grados de libertad, las componentes cartesianas de los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Para resolver las seis ecuaciones diferenciales de segundo orden, usaremos las integrales de movimiento disponibles para este caso: las tres componentes del momento lineal total (del CM), la conservación del momento angular y la energía mecánica total. Debemos insistir en que estas constantes de movimiento no son independientes entre sí (ver capítulo 4).

Primero eliminemos tres grados de libertad, usamos el sistema de coordenadas del centro de masa (CM) y coordenadas relativas (ver figura (4.1.)). Para esta transformación de coordenadas definimos:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{6.4}$$

$\mathbf{R}$ es la posición del centro de masa y $\mathbf{r}$ es la coordenada relativa. Con esta transformación, la energía cinética queda así,

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^{\,2} = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^{\,2} + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^{\,2}, \tag{6.5}$$

donde

$$M = m_1 + m_2 \tag{6.6}$$

$$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) \tag{6.7}$$

son la masa total y la masa reducida respectivamente. El segundo término en la ecuación (6.5) es la energía cinética relativa. Cambiando el origen al CM, la energía cinética relativa se puede escribir de la siguiente forma:

$$T' = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\mathbf{r}}_1'\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\mathbf{r}}_2'\right)^2, \tag{6.8}$$

donde $\dot{\mathbf{r}}_1'$ y $\dot{\mathbf{r}}_2'$ son las velocidades de las partículas 1 y 2 medidas desde el CM, es decir[1],

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1' &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2' &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Con esta transformación la función lagrangiana se puede escribir como sigue

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t\right) = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^{\,2} - V(r)\ . \tag{6.10}$$

En esta lagrangiana, las coordenadas del CM, $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, son coordenadas cíclicas (ignorables), de tal forma que las ecuaciones de Euler-Lagrange nos conducen a que[2]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = 0, \tag{6.11}$$

[1]Si la definición de $\mathbf{r}$ es la alternativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, los signos en estas ecuaciones se intercambian.

[2]Estamos usando la notación abreviada introducida n el capítulo 5. Esto significa que $P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}$, $P_Y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}}$ y $P_Z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}}$.

cuya integración directa nos proporciona la trayectoria del CM

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + V_{x0}t \\ Y(t) &= Y_0 + V_{y0}t \\ Z(t) &= Z_0 + V_{z0}t. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Esto es, el momento lineal del CM es una constante de movimiento y el CM se mueve de forma rectilínea uniforme y es a su ves un sistema inercial de referencia (SIR).

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{P} = & M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = cte \\ \mathbf{p}_1 = & m_1\dot{\mathbf{r}}_1, \qquad \mathbf{p}_2 = m_2\dot{\mathbf{r}}_2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

En esta solución para el movimiento del CM aparecen seis condiciones iniciales, las cuales se pueden escribir en términos de las integrales de movimiento correspondientes.

La energía cinética del CM puede ser ignorada por ser una constante y la lagrangiana reducida se escribe como sigue:

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t\right) = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^{.2} - V\left(r\right) \ , \tag{6.14}$$

esto es equivalente a cambiar el origen de coordenadas al CM que se mueve a velocidad constante y es también un SIR. La existencia de las integrales de movimiento $\mathbf{P} = cte$, nos permite eliminar (resolver o ignorar) tres grados de libertad (X, Y, Z), quedando sólo los tres grados de libertad correspondientes a las coordenadas relativas, cuyas ecuaciones de movimiento se obtendrán de la lagrangiana (6.14). Ésta representa (o contiene), la dinámica de una partícula ficticia de masa μ cuyo vector de posición $\mathbf{r}$ es la posición relativa de las partículas, su solución permitirá conocer las posiciones de las partículas $\mathbf{r}_1'$ y $\mathbf{r}_2'$ medidas desde el CM, por medio de la ecuación (6.9). Para el sistema fijo en el espacio, las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se conocerían invirtiendo las ecuaciones (6.3). En algunos casos de interés como es el movimiento planetario, una de las partículas tiene masa muy

grande comparada con la masa de la otra $m_2 >> m_1$, de tal forma que vista desde el centro de masa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1' &\approx -\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2' &\approx 0 \, , \end{aligned} \tag{6.15}$$

la partícula de masa grande está aproximadamente en el CM y la partícula ligera está casi en la posición $-\mathbf{r}$. Además, la masa reducida es aproximadamente la masa de la partícula ligera, $\mu \approx m_1$.

Para el caso del campo central, la fuerza está dirigida a lo largo del vector de posición relativo, de esta forma el momento de la fuerza (torque) es nulo y el momento angular relativo es constante,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \\ \overrightarrow{\ell} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = cte = \ell \widehat{\mathbf{u}}_\ell \, . \end{aligned} \tag{6.16}$$

La magnitud y dirección del vector $\overrightarrow{\ell}$ son constantes, por lo tanto, los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ son perpendiculares a la dirección constante $\widehat{\mathbf{u}}_\ell = \frac{\overrightarrow{\ell}}{|\ell|}$, esto implica que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ están siempre en el plano perpendicular a $\widehat{\mathbf{u}}_\ell$; en otras palabras, el movimiento se efectúa en un plano constante[3]. La dirección del momento angular elimina otro grado de libertad, el ángulo zenital, dejando sólo dos grados de libertad, las coordenadas de la partícula de masa μ en el plano.

Escojamos estos dos grados de libertad como las coordenadas polares en el plano, r y θ; la lagrangiana (6.14) puede escribirse como sigue,

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \, , \tag{6.17}$$

[3]Para definir un vector unitario constante se requieren dos parámetros, sus tres cosenos directores están relacionados debido a que la magnitud del vector es la unidad. Esto requiere definir dos constantes independientes que pueden ser reconocidas como dos integrales de movimiento.

de esta lagrangiana resulta de inmediato que θ es una variable ignorable $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0\right)$, de tal forma que

$$\dot{p_\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \,,$$

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = cte = \ell \,, \tag{6.18}$$

es la magnitud del momento angular y nos permite eliminar otro grado de libertad; permite escribir a $\dot{\theta}$ en términos de r,

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2}. \tag{6.19}$$

Antes de seguir adelante hagamos un paréntesis para probar un resultado importante. De la segunda de las ecuaciones (6.18) escribamos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2\mu} = cte \,, \tag{6.20}$$

en la figura (6.1.) observamos que el área barrida por el radio vector $\mathbf{r}$ es

$$dA = \frac{1}{2}r \cdot r d\theta, \implies \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2\mu} = cte. \tag{6.21}$$

Este resultado proviene de la conservación (de la magnitud) del momento angular, es decir, para todos los problemas de campo central $V(r)$, el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales; este resultado fue obtenido por Kepler para el movimiento planetario por medio del análisis de los datos astronómicos de Tycho Brahe, se le conoce como la segunda ley de Kepler o ley de las áreas. Debemos puntualizar que este resultado es válido para todo campo central.

Regresando a la lagrangiana (6.14), ésta nos conduce a la ecuación de movimiento para el grado de libertad restante; aplicando las ecuaciones de movimiento de Lagrange, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r}\right) - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

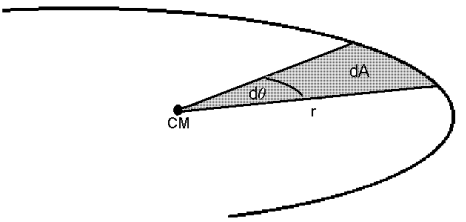

Figura 6.1. El vector de posición relativo recorre el área dA en el intervalo de tiempo dt.

y sustituyendo en la ecuación de movimiento resultante el valor de $\dot{\theta}$ obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r}\right) - \frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \,, \tag{6.22}$$

que también se puede escribir como sigue:

$$\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = F\left(r\right) \tag{6.23}$$

donde $F\left(r\right)$ es la magnitud de la fuerza aplicada, mientras que el segundo término del lado izquierdo corresponde a la fuerza centrífuga (de origen no inercial), la cual aparece por restringirnos al grado de libertad r; porque observamos el movimiento en un sistema que sólo mide la coordenada relativa, es un sistema que rota con la velocidad angular del objeto y no es inercial (SNIR).

Para resolver esta última ecuación de movimiento usaremos otra integral de movimiento disponible, la energía. La función de Hamilton se reduce a la energía debido a que la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las velocidades y las

fuerzas son conservativas, derivables de un potencial escalar, entonces,

$$H = E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^{2} + r^{2}\dot{\theta}^{2}\right) + V(r) \ , \tag{6.24}$$

que podemos transformar a

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^{2} + \frac{\ell^{2}}{2\mu r^{2}} + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^{2} + V^{ef}(r) \ , \tag{6.25}$$

donde

$$V^{ef}(r) = \frac{\ell^{2}}{2\mu r^{2}} + V(r)$$

es el potencial efectivo debido a la fuerza aplicada y al potencial centrífugo. De esta última expresión podemos despejar r (o el tiempo t) quedando:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^{2}}{2\mu r^{2}}\right)} \tag{6.26}$$

y finalmente integrando obtenemos que

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^{2}}{2\mu r^{2}}\right)}} \ , \tag{6.27}$$

en esta última ecuación hemos impuesto la condición inicial $r(t=0) = r_0$.

La solución (6.27) es a una cuadratura, en este sentido el problema está resuelto. Puede ser expresada analíticamente en términos de funciones conocidas o bien puede resolverse numéricamente. En principio, la ecuación (6.27) proporciona $t = t(r)$, que invirtiendo proporcionaría $r = r(t)$, al sustituir en la ecuación (6.19) permitiría calcular $\theta(t)$ mediante la integración

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \ell \int_{0}^{t} \frac{dt}{\mu r^{2}(t)} \tag{6.28}$$

completando la solución del problema.

Resumiendo: El problema de dos cuerpos interaccionando por campo central tiene seis grados de libertad, éste puede ser resuelto hasta una integral definida, debido a que cumple con varios teoremas de conservación que reducen el problema, disminuyendo el orden de la ecuación diferencial o eliminando grados de libertad. Usamos el vector de momento lineal total, la magnitud y dirección del momento angular y la energía mecánica total,

$$P_x, P_y, P_z, \widehat{u}_\ell, \ell, E. \tag{6.29}$$

Podemos conocer las doce integrales del movimiento a las que nos referimos en la sección 4.4. Las doce condiciones iniciales para los seis grados de libertad se relacionan con las integrales de movimiento descritas en (6.29). La conservación del momento lineal toma seis constantes iniciales: la posición y la velocidad inicial del centro de masa (ver ecuación (6.12)). La dirección del momento angular relativo toma otras dos constantes (dos cosenos directores que definen la dirección de un vector unitario), la magnitud del momento cinético ℓ y la energía E toman otras dos; las dos constantes restantes son r_0 y θ_0, la posición inicial del vector relativo en el plano del movimiento.

Un comentario más: En general, el problema del campo central no es soluble en coordenadas cartesianas, en este sistema de coordenadas es difícil llevarlo a una cuadratura. La razón de esto es que una de las integrales de movimiento, la magnitud del momento angular

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = \ell_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{6.30}$$

mezcla a dos de las velocidades y dos de las coordenadas (compare con la ecuación (6.19)) y no es fácil eliminar un grado de libertad o disminuir el orden de la ecuación diferencial debido a que el potencial es de la forma $V = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Equivalentemente: la cantidad conservada ℓ_z corresponde a una rotación por un ángulo θ cuyo eje de rotación es el eje z, esto deja invariante a la lagrangiana haciendo a θ una variable ignorable. Mientras que en coordenadas cartesianas, aunque existe

la simetría, no corresponde a ninguna coordenada ignorable. Por esta razón las coordenadas polares resultan naturales (o las más apropiadas) para este sistema. Un ejemplo que sí es posible resolver exactamente en coordenadas cartesianas es el oscilador armónico en tres dimensiones (ver capítulo 2). El campo gravitacional también lo es, pero requiere del uso de las mismas integrales de movimiento que hemos usado aquí (ver por ejemplo [11]).

6.2. Análisis del potencial efectivo

El problema de dos partículas en un campo central puede ser reducido a un problema equivalente de un solo grado de libertad r, con la lagrangiana (6.17), correspondiente a una partícula de masa reducida μ moviéndose en una dimensión r, bajo la acción del potencial efectivo formado por el potencial de la fuerza aplicada y el de la fuerza centrífuga,

$$V^{ef}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \,. \tag{6.31}$$

A pesar de que la solución (6.27) no siempre es realizable de manera exacta, mucha información cualitativa de la trayectoria puede ser obtenida de la conservación de la energía; haciendo uso de las ecuaciones (6.24) y (6.25). La rapidez (total) v y la velocidad radial $\dot{r}$ pueden calcularse para todo punto r mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r)\right)} \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)} \,, \end{aligned} \tag{6.32}$$

mientras que $\dot{\theta}$ pude calcularse como una componente de la velocidad total mediante:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 . \tag{6.33}$$

Los módulos de las velocidades v y $\dot{r}$ deben ser reales, lo que implica que el valor en el radicando deber ser mayor o igual a cero. La velocidad angular puede calcularse de la última de las ecuaciones (6.32)

Para mostrar la utilidad de este método analizaremos ahora el potencial atractivo del campo gravitacional

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} , \tag{6.34}$$

donde $\alpha = Gm_1m_2 > 0$, de tal forma que el potencial efectivo resulta ser

$$V^{ef}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} , \tag{6.35}$$

el potencial centrífugo es siempre repulsivo mientras que el potencial gravitacional es siempre atractivo. Una gráfica del potencial efectivo se puede observar en la figura (6.2.). Para un valor de $\ell \neq 0$, el potencial efectivo tiene el siguiente comportamiento[4]:

$$\begin{gathered} V^{ef}(r) \to \infty \\ r \to 0 \end{gathered} \qquad \begin{gathered} V^{ef}(r) \to 0 \\ r \to \infty, \end{gathered} \tag{6.36}$$

la curva tiene un solo mínimo en el punto $r_0 = \ell^2/\alpha\mu$ y el valor mínimo del potencial efectivo es $V_{\text{mín}} = -\frac{\alpha^2\mu}{2\ell^2}$. La parte positiva del potencial efectivo se conoce con el nombre de barrera centrífuga, esta barrera no existirá para $\ell = 0$. Analicemos ahora las cuatro posibles energías típicas: E_1, E_2, E_3 y E_4, que representan diversas condiciones iniciales y movimientos cualitativamente diferentes.

[4]El caso $\ell = 0$ corresponde al movimiento en una línea recta que pasa por el origen $r = 0$

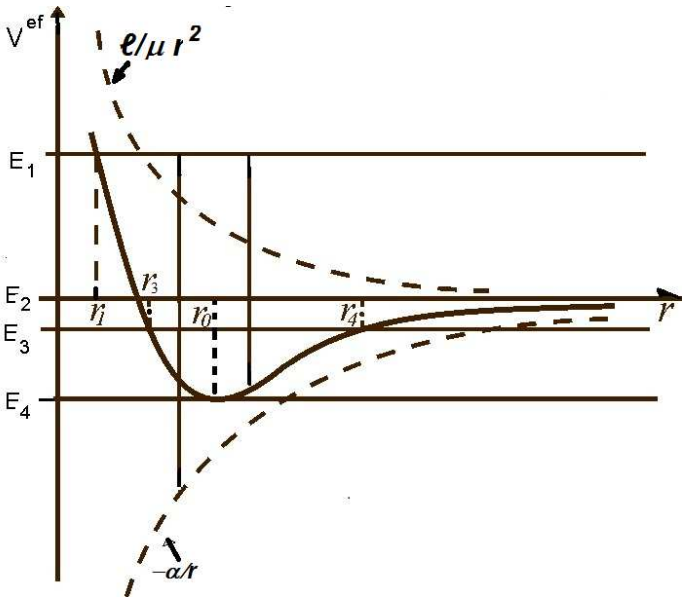

Figura 6.2. Potencial efectivo. La curva punteada superior corresponde al potencial repulsivo centrífugo, la curva punteada atractiva corresponde al potencial gravitacional, la curva sólida es la suma de éstas. La diferencia entre la energía constante y el potencial efectivo es proporcional al cuadrado de la velocidad radial, la diferencia entre la energía constante y la curva del potencial gravitacional es proporcional al cuadrado de la rapidez total.

a) $E = E_1$

Cuando las condiciones iniciales sean tales que la constante de energía sea $E_1 > 0$, la partícula ficticia de masa μ no puede acercarse al centro de fuerzas más allá de $r = r_1$; a r_1, se le llama el punto de retorno. Si $r < r_1$ la velocidad radial sería imaginaria (que no es físicamente aceptable), en $r = r_1$ la velocidad radial es nula $\dot{r} = 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ toma su valor máximo (ver ecuación (6.32)). La partícula puede alejarse del centro de fuerza sin límite, produciendo un movimiento no acotado o no ligado, la partícula no es atrapada por el campo gravitacional, la órbita es abierta y la partícula no regresa hacia el centro de fuerzas. En la siguiente sección mostraremos que para el caso del potencial gravitacional corresponde a una órbita hiperbólica (ver figura (6.3.)).

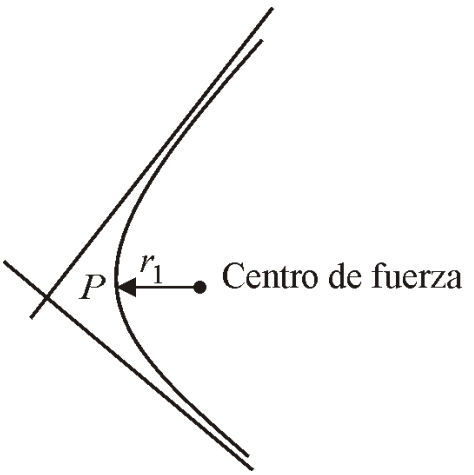

Figura 6.3. Para el caso $E > 0$, el potencial gravitacional produce una órbita abierta, una hipérbola, el punto de retorno es también el punto apsidal y en este caso corresponde a la distancia de mayor acercamiento al centro de fuerza.

b) $E = E_2 = 0$

En este caso hay muchas similitudes con el caso anterior, el punto de retorno es ahora r_2 (no se muestra en la figura) que cumple ($E = 0$ en las ecuaciones (6.32)), En este caso la partícula llegaría al infinito con energía cinética nula, si el potencial aplicado es el gravitacional, la órbita es una parábola.

c) $E = E_3 < 0$

En esta condición el sistema está ligado, la posición relativa r está acotada por $r_3 \leq r \leq r_4$, en los puntos r_3 y r_4 la velocidad radial es nula y la velocidad angular $\dot{\theta}$ diferente de cero y es más grande en r_3 que en r_4, los puntos r_3 y r_4 se llaman puntos apsidales. Posteriormente mostraremos que para el caso del potencial gravitacional $V = -\alpha/r$, la órbita es cerrada, es una elipse y los puntos apsidales r_3 y r_4 se convierten el perigeo (perihelio) y apogeo (afelio) respectivamente. Si el potencial de la fuerza aplicada no es el potencial gravitacional la órbita no es necesariamente cerrada.

d) $E = E_4 = V^{ef}_{\text{mín}}$

En este caso sólo existe la posibilidad de $r_0 = cte$, es decir, el movimiento es circular ($\dot{r} = 0$) y la velocidad angular es $\dot{\theta} = \ell/\mu r_0^2 = cte$, es un movimiento circular uniforme, por lo tanto el apogeo y el perigeo coinciden. En el mínimo la derivada del potencial efectivo es nula, y entonces,

$$\frac{\alpha}{r^2} = \mu r \dot{\theta}^2 \tag{6.37}$$

lo cual significa que la fuerza aplicada iguala a la fuerza centrípeta, ésta es la condición bien conocida para un movimiento circular uniforme.

Un análisis cualitativo equivalente puede hacerse para cualquier potencial central, el análisis de la curva de potencial efectivo permite obtener mucha información sobre propiedades del movimiento aún sin resolverlo completamente.

6.3. Ecuación de la órbita

La ecuación (6.27) junto con la ecuación (6.19) proporcionan la solución formal al problema del campo central. En la gran mayoría de potenciales centrales dicha ecuación no es integrable en términos de funciones conocidas; más aún, cuando es integrable no siempre se puede invertir para obtener $r = r\,(t)$. Además, también debemos integrar al ángulo θ,

$$d\theta = \frac{\ell^2}{\mu r^2\,(t)} dt\ , \tag{6.38}$$

y finalmente eliminar al parámetro tiempo para obtener la órbita; esta forma rewsulta poco útil.

Aún en el caso de potenciales sencillos como el gravitacional, la solución (6.27) no es simple, de tal forma que $r\,(t)$ y $\theta\,(t)$ sólo pueden obtenerse como series infinitas o soluciones numéricas. Este método tiene un incidente histórico: el movimiento planetario se intentó describir como una solución temporal, resultando muy complejo, la mejor representación que se logró fue la de Copérnico en términos de superposición de movimientos circulares llamados deferente el primero y epiciclos los sucesivos. El cambio radical fue introducido por J. Kepler que introdujo el estudio de la órbita $r = r\,(\theta)$ en lugar de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$, es decir, describió al movimiento planetario eliminando al tiempo de la descripción de esta foema obtuvo tres leyes empíricas que resultaron muy útiles. La segunda de estas leyes, la ley de la velocidad aerolar ya la demostramos gracias a la conservación del momento angular (ver ecuación (6.21)). Dichos resultados

fueron de gran utilidad para Newton en el establecimiento de la ley de la atracción gravitacional.

Obtendremos ahora la ecuación que determina la órbita: de las ecuaciones (6.26) y (6.19) tenemos que

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)} \tag{6.39}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2}\,, \tag{6.40}$$

eliminando de la segunda ecuación al tiempo $dt = \frac{\mu r^2}{\ell} d\theta$ y sustituyendo en la primera obtenemos que,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\mu r^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)} \tag{6.41}$$

e integrando tendremos

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} - \frac{2\mu}{\ell^2}V(r) - \frac{1}{r^2}}}\,, \tag{6.42}$$

donde $\theta_0 = \theta(t=0)$ y $r_0 = r(t=0)$ son las condiciones iniciales. Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la órbita para el campo central $V(r)$; su solución nos proporcionará $\theta = \theta(r)$ e invirtiendo $r = r(\theta)$ conteniendo las condiciones iniciales. Una forma más cómoda de escribir e integrar esta ecuación se obtiene al cambiar la variable a $u = 1/r$, con lo que obtenemos,

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} - \frac{2\mu}{\ell^2}V(u) - u^2}}. \tag{6.43}$$

El método descrito en el último párrafo no siempre es posible realizarlo de forma analítica, solamente algunos casos sencillos son integrables en términos de funciones conocidas; por ejemplo, si el potencial y la fuerza toman la forma

$$V = \alpha r^{n+1} \quad , \quad F = -\alpha(n+1)r^n, \tag{6.44}$$

la ecuación (6.43) es integrable en términos de funciones circulares para $n = 1, -2, -3$. Para valores de $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ la solución se puede escribir en términos de funciones elípticas[5], para los valores fraccionarios de n, $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}$, la solución puede también practicarse en términos de funciones elípticas.

El problema de Kepler

El problema de Kepler se refiere a la obtención de la órbita en el campo central del potencial gravitacional, *i.e.*, el movimiento planetario; este problema lo podemos resolver fácilmente con los resultados de las secciones previas. Usando la ecuación integral de la órbita (6.43), la solución al problema de Kepler es inmediata; en el caso del potencial gravitacional,

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{\alpha}{r} = -\alpha u \tag{6.45}$$

donde G es la constante de atracción gravitacional, m_2 la masa de un cuerpo (en este caso el Sol) y m_1 la masa del otro objeto (en este caso un planeta). En este caso la ecuación de la órbita queda así:

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{\ell^2} + \frac{2\mu\alpha}{\ell^2}u - u^2}}\,, \tag{6.46}$$

esta integral es bien conocida, resulta ser una función trigonométrica inversa:

$$\theta - \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{\ell^2 u}{\mu\alpha} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}}\right)\,, \tag{6.47}$$

[5]Una integral elíptica se define como $\int R\,(x, Q)\,dx$ donde R es una función racional de x y $Q(x) = \sqrt{Q_4\,(x)}$ con Q_4 un polinomio a lo más de grado 4. Para mayores detalles se recomienda las referencias [12, 14, 16, 17]

que se puede invertir fácilmente para obtener[6]

$$r = r(\theta) = \frac{\frac{\ell^2}{\mu\alpha}}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)} . \tag{6.48}$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación de una cónica en coordenadas polares con su foco en el origen,

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} , \tag{6.49}$$

podemos reconocer que la ecuación de la órbita (6.48) es la de una cónica con el foco en el origen, hacia donde está dirigida la fuerza, $r_0 = \ell^2/\mu\alpha$ es la distancia a la que el potencial efectivo es mínimo. La ecuación (6.49) corresponde al enunciado de la primera ley de Kepler: los planetas se mueven en un plano y tienen órbitas elípticas en cuyo foco está el sol. Nótese que esta ley de Kepler no incluía a las órbitas abiertas que trazan los cometas.

La excentricidad de esta cónica es,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}} , \tag{6.50}$$

de tal forma que las cónicas asociadas a cada valor de la energía son:

$$\begin{array}{lcll} e > 1 & \rightarrow & E > 0 & \text{hipérbola} \\ e = 1 & \rightarrow & E = 0 & \text{parábola} \\ e < 1 & \rightarrow & E < 0 & \text{elipse} \\ e = 0 & \rightarrow & E = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell^2} & \text{círculo.} \end{array} \tag{6.51}$$

Es decir, los valores de la energía y momento angular determinan la excentricidad y el tipo de órbita: es abierta si $E \geq 0$ y cerrada

[6]Evaluar en u_0 sólo produce una constante que se puede incluir en θ_0, su valor es irrelevante desde el punto de vista dinámico, la información que proporciona es el punto donde se empieza a medir la órbita.

si $0 > E \geqslant E_{\text{mín}}$. El caso de una órbita circular (de energía mínima) se puede reducir a la siguiente condición:

$$E_{\text{mín}} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell^2} \ , \tag{6.52}$$

con ayuda de la ecuación (6.48) obtenemos que r es una constante igual a

$$r_0 = \frac{\ell^2}{\mu\alpha} \ , \tag{6.53}$$

y por lo tanto

$$E_{\text{mín}} = -\frac{\alpha}{2r_0} \ . \tag{6.54}$$

Nótese que esta expresión corresponde al teorema del virial $\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}$ ó $\overline{E} = \frac{1}{2}\overline{V}$, en este caso el promedio temporal de cantidades constantes son ellas mismas[7]. Sustituyendo la ecuación (6.54) en la conservación de energía para una órbita circular obtenemos que

$$E = -\frac{\alpha}{2r_0} = \frac{\mu}{2} r_0^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r_0} \tag{6.55}$$

lo cual nos conduce a

$$\frac{\alpha}{r_0} = \mu r_0^2 \dot{\theta}^2 \ ; \tag{6.56}$$

esta última expresión es la condición para un movimiento circular uniforme donde la fuerza de atracción es igual a la fuerza centrípeta.

El caso del movimiento elíptico corresponde al movimiento de los planetas alrededor del Sol y al de cometas periódicos, las órbitas abiertas corresponden a las de los cometas no periódicos. La órbita de cada planeta o cometa está completamente determinada por las constantes de energía E y del momento angular ℓ (ver ecuación (6.48)).

[7]Para el caso de órbitas no circulares el teorema del virial sigue siendo válido pero no es igual de fácil probarlo, la demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

Si en la ecuación de la órbita (6.48) ponemos el eje polar sobre el eje de la elipse $\theta_0 = 0$, tal que

$$r_1 = r\,(\theta = 0) \quad \text{y} \quad r_2 = r\,(\theta = \pi)\ , \tag{6.57}$$

el semieje mayor a satisface que (ver figura (6.4.))

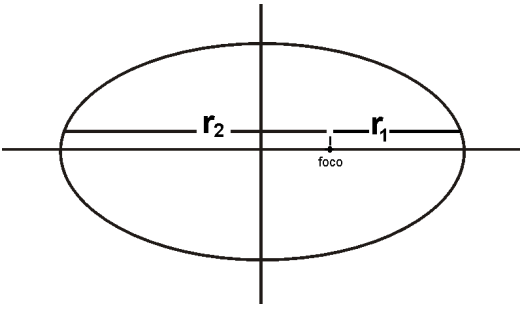

Figura 6.4. El semieje mayor de la elipse es la semisuma de la mayor y menor distancia al foco.

$$2a = r_1 + r_2\ , \tag{6.58}$$

con lo que obtenemos que

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{r_0}{1+e} + \frac{r_0}{1-e}; \tag{6.59}$$

sustituyendo el valor de $r_0 = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}$ obtenemos que el semieje mayor vale

$$a = -\frac{\alpha}{2E}, \tag{6.60}$$

los semiejes están relacionados con la excentricidad,

$$b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\frac{a\ell^2}{\mu\alpha}}\ . \tag{6.61}$$

Ahora podemos probar la tercera ley de Kepler; debido a que la velocidad aerolar es constante, podemos calcular el período τ del planeta mediante una simple integración,

$$A = \int_0^\tau dA = \int_0^\tau \frac{\ell}{2\mu} dt = \frac{\ell\tau}{2\mu} \,, \tag{6.62}$$

de tal forma que para una elipse $A = \pi ab$, el periodo toma el valor

$$\tau = \frac{2\mu}{\ell} \cdot \pi a \sqrt{\frac{a\ell^2}{\mu\alpha}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \,, \tag{6.63}$$

esta última ecuación es la tercera ley de Kepler : *el cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo de los semiejes mayores*. Sin embargo, la tercera ley de Kepler no es exacta, el periodo depende de la masa del planeta. Esto se debe a que μ es la masa reducida y $\alpha = Gm_1m_2$, de tal forma que la ecuación (6.63) se arregla como sigue,

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G\left(m_1 + m_2\right)}}, \tag{6.64}$$

el período del planeta depende de su masa m_1. Si en la última expresión suponemos que la masa del Sol es mucho más grande que la masa de cualquier planeta, $m_2 \gg m_1$, encontramos que la tercera ley de Kepler

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_2}} a^{\frac{3}{2}}.$$

es una muy buena aproximación al resultado exacto.
De esta forma el movimiento de los cuerpos celestes fue explicado exitosamente, la ley de gravitación de Newton explica el movimiento de los cuerpos celestes, reproduce apropiadamente las leyes de Kepler y por primera vez se pudo predecir el movimiento de los objetos celestes en el campo gravitacional. Uno de los más grandes éxitos alcanzados por esta teoría fue explicar la periodicidad del cometa de Halley y predecir su retorno [53].

6.4. La ecuación diferencial de la órbita

Resolver el problema del campo central significa obtener la ecuación paramétrica de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; sin embargo, en ocasiones es más conveniente (o fácil) obtener la ecuación de la órbita eliminando al tiempo t; para el problema equivalente en dos dimensiones significa obtener $r = r(\theta)$. En el problema del campo central es posible eliminar al tiempo desde la misma ecuación diferencial de movimiento haciendo uso del la conservación del momento angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2}, \tag{6.65}$$

de esta forma podemos relacionar la diferencial del tiempo con la de la coordenada angular,

$$dt = \frac{\mu r^2}{l} d\theta, \tag{6.66}$$

entonces, podemos escribir las derivadas con respecto del tiempo de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}, \tag{6.67}$$

y la segunda derivada temporal resulta ser

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \right). \tag{6.68}$$

De esta forma, la ecuación de movimiento (6.22) se convierte en:

$$\mu \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = F(r), \tag{6.69}$$

el primer término es el producto de la masa reducida y la aceleración radial, el segundo término es la fuerza centrífuga (de

origen no inercial) y en el lado derecho está la fuerza aplicada. Realizando los pasos algebraicos necesarios y cambiando la variable a $u = \frac{1}{r}$ podemos transformar esta ecuación a

$$\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -F\left(\frac{1}{u}\right). \tag{6.70}$$

Esta es la ecuación diferencial de la órbita, es una forma equivalente de escribir la segunda ley de Newton para el campo central. Esta forma de ley de Newton puede ser usada operacionalmente: a) si se conoce la órbita esta ecuación diferencial proporciona la magnitud de fuerza; b) si se conoce la fuerza, esta ecuación puede ser integrada para conocer la trayectoria (ver ejercicio al final del capítulo).

También permite establecer el siguiente resultado: Si la órbita tiene un punto apsidal sobre el cual colocamos al eje polar, y definimos las condiciones iniciales en ese punto apsidal de la siguiente manera[8]:

$$u(\theta = 0) = u_0 \quad \text{y} \qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0, \tag{6.71}$$

con estas condiciones iniciales la solución de la ecuación (6.70) $u = u(\theta)$, tiene la siguiente propiedad

$$u(\theta) = u(-\theta), \tag{6.72}$$

esto se debe a que la ecuación diferencial de la órbita (ecuación (6.70)) es invariante ante la inversión $\theta \to -\theta$, esto es, la órbita es simétrica respecto a cualquier punto apsidal.

En el caso en que deseamos calcular la órbita cuando la fuerza aplicada es conocida, la ecuación (6.70) debe ser integrada, con esto se obtiene la ecuación integral de la órbita (6.43), este resultado ya fue obtenido previamente usando la conservación de la energía y haciendo uso de la conservación de la magnitud del momento angular (ecuación (6.66)) .

[8]Estas condiciones definen al punto apsidal, en este punto la velocidad radial es nula.

6.5. Teorema de Bertrand

Estabilidad de las órbitas circulares

Históricamente fue muy importante saber que tipo de órbitas planetarias eran estables y que tipo de potenciales producían orbitas estables; esto es, ante pequeñas perturbaciones ¿cuáles órbitas permanecen muy poco alteradas y cuáles cambian cualitativamente su forma? El teorema de Bertrand resuelve esta pregunta.

El potencial efectivo para cualquier potencial central señala que cuando este potencial tiene un mínimo, existe una órbita circular; de manera análoga al mínimo de la figura (6.2.); la órbita circular es solución al problema del campo central cuando la energía toma el valor mínimo. No todas las órbitas circulares producidas por un potencial central son estables. Estudiemos las condiciones en las cuales una órbita circular es estable cuando es perturbada ligeramente. Consideremos la ecuación de movimiento radial para este tipo de fuerza (ver ecuación (6.23)):

$$\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = F(r) \ , \tag{6.73}$$

para la condición de órbita circular de radio r_0 tendremos que $\ddot{r} = 0$ o bien que

$$-\frac{\ell^2}{\mu r_0^3} = F(r_0) \ . \tag{6.74}$$

Ante una pequeña variación de la órbita, el radio cambia a r tal que la variación respecto a la posición de equilibrio es

$$\xi = r - r_0 \tag{6.75}$$

y la ecuación de movimiento para esta órbita cercanamente circular la obtenemos de la ecuación (6.73):

$$\mu\ddot{\xi} - \frac{\ell^2}{\mu}(\xi + r_0)^{-3} = F(\xi + r_0) \ ; \tag{6.76}$$

si la perturbación que causa este cambio en la órbita es pequeña, podemos desarrollar el binomio y a la fuerza $F(\xi + r_0)$ en serie de Taylor, manteniéndonos a primer orden en ξ, por ser muy pequeña debe cumplir que $\xi^2 << \xi$. Entonces, obtenemos

$$\mu\ddot{\xi} - \frac{\ell^2}{\mu}\left(1 - 3\frac{\xi}{r_0} + ...\right) r_0^{-3} = F(r_0) + F'(r_0)\,\xi + ... \quad (6.77)$$

y sustituyendo la ecuación (6.74) en (6.77) resulta que

$$\mu\ddot{\xi} + \left(-\frac{3}{r_0}F(r_0) - F'(r_0)\right)\xi = 0. \quad (6.78)$$

La solución para ξ es la de un oscilador armónico de frecuencia Ω,

$$\Omega^2 = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{3}{r_0}F(r_0) - F'(r_0)\right) > 0\,, \quad (6.79)$$

si este factor fuese negativo ξ crecería exponencialmente; la órbita, inicialmente circular, sería inestable; si este coeficiente es cero el análisis debe hacerse a órdenes superiores en ξ. En el caso en que se cumpla la relación (6.79), ξ tiene solución armónica y la órbita oscila en torno a la órbita circular original entre un radio mínimo y uno máximo, *i.e.*, la órbita de radio r_0 es estable si se cumple (6.79), (ver figura (6.5.)), el radio vector tiene por solución a

$$r = r_0 + \xi_0 \cos(\Omega t + \gamma). \quad (6.80)$$

La órbita es cerrada si $\frac{\Omega}{\dot{\theta}} = \frac{n}{m}$ donde n y m son números enteros, $\dot{\theta}$ es la velocidad angular del objeto.

Supongamos que el potencial y la fuerza toman la forma siguiente:

$$V = \frac{\alpha r^{n+1}}{n+1}, \qquad F = -\alpha r^n, \quad (n \neq -1)\,, \quad (6.81)$$

la condición para la estabilidad (6.79) se convierte en

$$-\frac{3}{r_0}\alpha r_0^n - \alpha n r_0^{n-1} < 0 \quad (6.82)$$

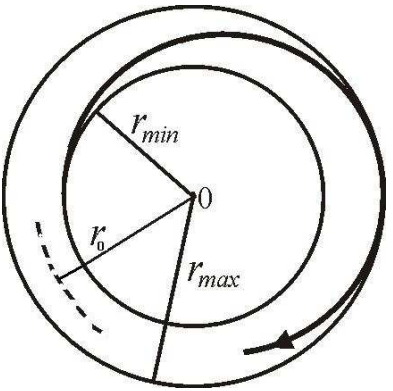

Figura 6.5. Órbita circular estable. Ante una pequeña perturbación, la órbita inicialmente circular oscila alrededor de r_0. En la figura, Ω y $\dot{\theta}$ tienen cociente aproximadamente 1.

o equivalentemente

$$n > -3. \tag{6.83}$$

Un análisis más detallado[9] demuestra que solamente los casos $n = -2$ y $n = 1$ producen órbitas circulares estables. En otras palabras, sólo los potenciales centrales $n = -2$ que corresponde al potencial gravitacional (o al potencial coulombiano) y $n = 1$ que corresponde a la fuerza de un resorte lineal, producen órbitas circulares estables. Este resultado recibe el nombre debido a su autor J. Bertrand, *Teorema de Bertrand.*

Por una pequeña perturbación entendemos que por algún mecanismo externo se incrementa ligeramente la energía desde el mínimo del potencial efectivo, el movimiento de la partícula está ahora confinado entre dos nuevos puntos de retorno, $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$, la órbita puede o no ser cerrada, pero si el potencial es de la forma (6.81) con $n = 1, -2$ la órbita circular es estable. Un ejemplo de este caso sería el choque de un asteroide pequeño perturbando a la Luna (cuya órbita es muy próxima

[9]Ver por ejemplo la referencia [12]

a un círculo), la órbita se modificaría ligeramente oscilando en torno al radio de estabilidad r_0. Si la energía transmitida en la colisión es muy grande, la órbita pasaría a ser elíptica, una órbita elongada, o inclusive podría sacar a la Luna del campo gravitacional de la Tierra. El desarrollo en (6.77) ya no sería válido.

6.6. Vector de Laplace-Runge-Lenz

El potencial gravitacional $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ tiene una integral de movimiento propia, el vector de Laplace-Runge-Lenz. Consideremos el vector

$$\mathcal{R} = \mathbf{p} \times \overrightarrow{\ell} - \mu\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{6.84}$$

que tiene dimensiones de $\left[Newton \cdot kg \cdot m^2\right]$; el cambio temporal de este vector es:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \times \overrightarrow{\ell} - \mu\alpha \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \mu\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}, \tag{6.85}$$

aquí ya hemos incluido el hecho que el momento angular es constante, el término $\dot{\mathbf{p}}$ es la fuerza $\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$, de esta forma la ecuación (6.85) se convierte en

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mu\alpha \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \mu\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}, \tag{6.86}$$

escribiendo $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ y desarrollando el triple producto obtenemos

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\mu\alpha \left(\frac{\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right) - r^2\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r} \right). \tag{6.87}$$

Ahora usamos la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}, \tag{6.88}$$

de esta forma, podemos transformar a

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\mu\alpha\left(\frac{\mathbf{r}r\dot{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}\right) = 0. \tag{6.89}$$

Esto significa que para el potencial gravitacional el vector de Laplace-Runge-Lenz es una integral de movimiento. Interpretemos este vector constante; es fácil probar que

$$\mathcal{R}\cdot\overrightarrow{\ell} = \mathbf{0}, \tag{6.90}$$

i.e., el vector $\mathcal{R}$ está en el plano del movimiento; además, está fijo por ser un vector constante. Si llamamos χ al ángulo entre este vector y el vector de posición relativo,

$$\mathcal{R}\cdot\mathbf{r} = Rr\cos\chi = (\mathbf{p}\times\overrightarrow{\ell}\,)\cdot\mathbf{r} - \mu\alpha r, \tag{6.91}$$

en el triple producto escalar podemos intercambiar al $\cdot$ con la $\times$ en el orden cíclico obteniendo la siguiente expresión:

$$Rr\cos\chi = \ell^2 - \mu\alpha r, \tag{6.92}$$

despejando a r llegamos a que

$$r = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}\left(\frac{1}{1 + \frac{R}{\mu\alpha}\cos\chi}\right). \tag{6.93}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (6.49) reconocemos la ecuación de la órbita para el potencial gravitacional[10]; notemos que en esta forma de obtener la órbita no usamos las condiciones iniciales. Si el ángulo entre el vector constante $\mathcal{R}$ y el vector de posición $\mathbf{r}$ se hace cero, obtenemos la distancia más pequeña al centro de fuerza. Por lo tanto, la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz es la dirección del perihelio. De

[10]Esta es otra forma de resolver el problema del campo gravitacional, usando una integral de movimiento diferente.

esta comparación también obtenemos el segundo resultado, la excentricidad de la órbita es

$$e = \frac{|\mathcal{R}|}{\mu\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{6.94}$$

El vector $\mathcal{R}$ define dos parámetros importantes de la órbita: a) la dirección del perihelio (o el eje polar) y b) la excentricidad de la órbita. Esta última expresión muestra que las constantes del movimiento no son todas independientes, en este caso $|\mathcal{R}|$ se puede escribir en términos de E y ℓ.

6.7. Dispersión de Rutherford

Un resultado muy útil proveniente del estudio del campo central se refiere al cálculo de la sección transversal de dispersión, en el caso del potencial coulombiano es la sección de dispersión de Rutherford, cuyo resultado fue muy importante y este método se sigue usando hasta nuestros días para estudiar la dinámica de sistemas microscópicos. La sección de dispersión se define como el cociente del número n de partículas en la unidad de tiempo, que es desviado de un flujo incidente sobre un centro de fuerza, el flujo incidente tiene N partículas por unidad de área y por unidad de tiempo. Es decir, la sección transversal de dispersión σ se define por

$$\sigma = \frac{n}{N}. \tag{6.95}$$

La sección de dispersión es un concepto de carácter estadístico debido a que las trayectorias de las partículas no se pueden seguir en detalle, sólo es posible contar las partículas que son desviadas. En el sistema del centro de masa el problema se reduce al de partículas de masa μ (la masa reducida) incidiendo sobre un centro de fuerzas fijo (al CM) y las partículas se describen por su vector de posición relativa r. Supondremos que

las partículas incidentes no interaccionan entre sí, esto se logra con flujos pequeños; experimentalmente requiere mantener el experimento por tiempos muy grandes para acumular una buena estadística y lograr una buena medida del parámetro σ.

La sección de dispersión σ quedará determinada por la interacción entre la partícula que incide y la partícula sobre la que incide (las llamaremos proyectil y blanco respectivamente). En lo que sigue, supondremos que el potencial que actúa entre las partículas es central, es el potencial electrostático de Coulomb

$$V\ (r) = \frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha = \frac{ZeZ'e'}{4\pi\varepsilon_0} \tag{6.96}$$

en el cual sólo consideramos la interacción entre el proyectil con la carga del blanco[11]. $Z'e'$ es la carga del blanco y Ze es la carga del proyectil, en esta notación estamos usando el SI de unidades y por lo tanto aparece el el factor $1/4\pi\varepsilon_0$ y ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío.

La sección transversal diferencial de dispersión $\sigma\left(\theta,\phi\right)d\Omega$ se define como el número de partículas dispersadas en la dirección θ,ϕ dentro del ángulo sólido $d\Omega$ en la unidad de tiempo, dividido por la intensidad del haz incidente; la intensidad incidente es el número de proyectiles que cruzan la unidad de área y por unidad de tiempo. De esta manera la sección de dispersión tiene unidades de área.

$$\sigma\left(\theta,\phi\right)d\Omega = \frac{\#\text{ de part. disp. a }\ d\Omega/\Delta t}{\text{intensidad incidente}}.$$

Debido a que el potencial es central, la órbita es plana y el problema tiene simetría de revolución; no depende del ángulo azimutal ϕ, la sección se convierte en una función sólo del ángulo θ:

$$2\pi\sigma\left(\theta\right)\ sen\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\sigma\left(\theta,\phi\right)sen\theta\, d\theta\right)d\phi\ . \tag{6.97}$$

[11] En el experimento de Rutherford se lanzaban partículas α sobre átomos de Au contenidos en una lámina muy delgada. La interacción con los electrones se desprecia porque son muy ligeros, la transferencia de momento de los electrones a la partícula α es muy pequeña o despreciable.

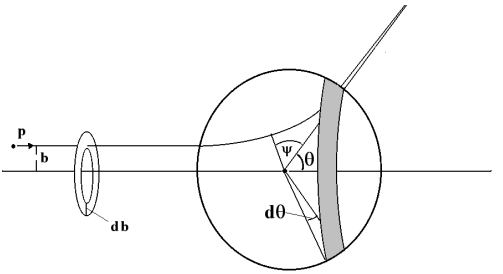

Figura 6.6. El proyectil es una partícula de masa μ y tiene momento relativo $\mathbf{p}$, incide sobre el blanco (centro de fuerza) y es dispersada a un ángulo θ dentro del ángulo sólido $d\Omega$, el proceso tiene simetría de revolución en torno al eje definido por la dirección de incidencia.

Todas las partículas que incidan a la distancia entre b y $b + db$ (ver figura (6.6.)) tienen el mismo valor del momento angular y la misma energía, estos valores determinan su órbita, por lo tanto todas ellas serán dispersadas al mismo ángulo θ dentro del ángulo sólido 2π sen$\theta\, d\theta$, esto es,

$$2\pi\, \sigma\left(\theta\right)\, sen\theta\, d\theta = -2\pi b db, \tag{6.98}$$

el signo negativo proviene del hecho de que al crecer b decrece θ. El parámetro b, se llama el parámetro de impacto y se define como la distancia al eje de dispersión. De la ecuación (6.98) podemos escribir que

$$\sigma\left(\theta\right) = -\frac{b}{sen\theta}\frac{db}{d\theta}, \tag{6.99}$$

para calcular $\sigma\left(\theta\right)$ necesitamos expresar al parámetro de impacto en términos del ángulo de dispersión, esto lo podemos hacer usando la ecuación de la órbita. La energía y el momento angular se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \ell &= \mu v_0 b \\ E &= \frac{\mu}{2} v_0^2 \end{aligned} \tag{6.100}$$

donde $p = \mu v_0$ y la ecuación de la órbita es la de una hipérbola, ψ es el ángulo polar y r es la distancia al foco ocupado por el centro dispersor,

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha\mu}{\ell^2}\left(1 + e\cos\psi\right) \ , \tag{6.101}$$

con

$$\alpha = \frac{ZeZ'e'}{4\pi\varepsilon_0} \text{ y } \ \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{6.102}$$

ϵ es la excentricidad de la cónica (hipérbola). En la dirección asintótica $r \to \infty$ el ángulo polar es $\psi = \psi_0$, es decir ψ_0 cumple con

$$\epsilon\cos\psi_0 = -1 \ , \quad v = -\sec\psi_0 \ . \tag{6.103}$$

De la figura (6.6.) obtenemos que

$$2\psi_0 + \theta = \pi$$

donde θ es el ángulo de dispersión, de este resultado se sigue que

$$\cos\psi_0 = sen\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}}, \tag{6.104}$$

sustituyendo (6.104) en (6.103) y usando (6.102) llegamos a

$$b = \frac{\ell}{\mu v_0} = \frac{\alpha}{\mu v_0^2}\cot\frac{\theta}{2} = b(\theta). \tag{6.105}$$

Notemos que toda la dependencia en el ángulo de dispersión está contenida en los parámetros de la órbita a través del momento angular y la energía; a su vez, el momento angular depende del parámetro de impacto. Con esta expresión podemos calcular $\sigma\left(\theta\right)$ mediante la ecuación (6.99) resultando que

$$\sigma\left(\theta\right) = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_0^4}\cdot\csc^4\frac{\theta}{2} \ , \tag{6.106}$$

también se puede escribir como sigue,

$$\sigma(\theta) = \frac{\alpha^2}{16E^2} \cdot \frac{1}{sen^4 \frac{\theta}{2}} \; ; \tag{6.107}$$

esta última expresión es la fórmula de E. Rutherford para la sección transversal diferencial de dispersión por el potencial coulombiano. Las propiedades de esta sección de dispersión son: a) es la misma para un potencial coulombiano atractivo que para uno repulsivo, a pesar de que la trayectoria no es la misma; b) depende inversamente del cuadrado de la energía relativa; c) diverge para $\theta = 0$. Esto último se debe a que si colocamos el detector muy lejano pero en la dirección de incidencia, todas las partículas con parámetro de impacto muy grande llegarán a ese detector y, debido a que el haz incidente es en principio homogéneo y ocupa todo el espacio, el número de partículas arribando al detector es infinito. Por supuesto las condiciones reales del experimento no son éstas pero el modelo desarrollado tiene este defecto.

Este método fue usado muy exitosamente por Rutherford para demostrar la existencia del núcleo atómico, el que permitió inmediatamente a N. Bohr crear su modelo planetario del átomo en sustitución del modelo de J. J. Thomson. La ecuación (6.107) ajustaba muy bien los datos experimentales de Rutherford para su experimento de dispersión de partículas α por núcleos de oro; si no existiera el núcleo del átomo no sería posible obtener ángulos de dispersión tan grandes como los que se observan en el experimento. Actualmente este método de análisis es muy usado para investigar las interacciones y las propiedades de sistemas microscópicos.

Es necesario comentar que el resultado de Rutherford fue obtenido aplicando la teoría clásica de Newton a un sistema de átomos o núcleos que no obedecen las leyes de la mecánica clásica. Sin embargo, al aplicar la teoría cuántica el resultado es, casualmente, el mismo; esto constituye una coincidencia sin igual en la física. Si Rutherford no hubiese sido tan afortunado

en este sentido, el descubrimiento del núcleo atómico y la teoría cuántica hubiera tardado mucho más tiempo.

La sección total de dispersión se calcula integrando sobre todo el ángulo sólido, para el caso de la dispersión por un potencial coulombiano tendremos que:

$$\sigma = \int d\sigma = \int \sigma\left(\theta, \phi\right) d\Omega \,, \tag{6.108}$$

la sección total en el caso $V = \alpha/r$ produce σ infinita; esto se debe a la singularidad de la sección diferencial en $\theta = 0$.

6.8. Ejercicios

1. Demuestre la validez de la ecuación (6.5).

2. Suponga el oscilador armónico isótropo $F(r) = -kr$, obtenga el potencial efectivo y analice cualitativamente las posibles órbitas para varios valores de la energía.

3. Suponga que dos partículas interaccionan por el campo central $V(r) = -V_0 e^{(-\frac{\alpha r^2}{b})}$, con $V_0 > 0$. Analizando el potencial efectivo describa las propiedades de las órbitas posibles para diversos valores de la energía.

4. Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 sujetas por un resorte con constante de restitución lineal k, usando el método de Lagrange resuelva el problema y demuestre que la órbita que describe la coordenada relativa es una elipse cuyo centro está en el centro de fuerzas (el CM). ¿Puede encontrar la dependencia temporal $r(t)$ y $\theta = \theta(t)$ usando la ecuación (6.27)? (Vea la sección correspondiente en el capítulo 4).

5. La órbita de una partícula de masa reducida μ y momento angular relativo ℓ en un campo central es una elipse con centro en el origen,

$$\frac{1}{r^2} = a + b\cos(2\theta + \gamma), \tag{6.109}$$

   obtenga la fuerza que se aplica sobre la masa μ. Dibuje la órbita (ver ecuación (4.108)).

6. El conocimiento de la órbita (o de la trayectoria) proporcionan la ley de fuerza. Demuestre que la ley de atracción gravitacional se obtiene al suponer que la magnitud del vector de posición relativo satisface la ecuación (6.49), *i.e.*, que la partícula de masa reducida μ describe una cónica cuyo foco está en el centro de fuerzas.

7. Demuestre que si la órbita de una partícula es circular, la fuerza aplicada iguala a la fuerza centrípeta.

8. Aplique el teorema del virial para demostrar la ecuación (6.54).

9. Complete los pasos algebraicos para obtener la ecuación (6.70).

10. Un asteroide de masa $m = 10^{-8} M_T$, con M_T la masa de la Tierra, orbita la Tierra con su perigeo igual a $2R_T$ donde R_T es el radio de la Tierra, la excentricidad de su órbita elíptica es 0,9. *a*) Calcule el periodo de revolución. *b*) Calcule su velocidad aerolar. *c*) ¿ Cúal es la magnitud del vector de Laplace-Runge Lenz?

11. Calcule la magnitud y dirección del vector de Laplace-Runge Lenz para el caso del movimiento de la Tierra en torno al Sol.

12. En el caso del experimento de Rutherford el haz de partículas alfa tiene una intensidad muy baja, $I = 10$ partículas/$(s \cdot \mathrm{cm}^2)$, la energía de las partículas es de $E = 4{,}2$ Mev, el dispersor es oro. ¿Cuantas partículas por unidad de tiempo y por unidad de ángulo sólido se detectan al ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$?

7

MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

En este capítulo estudiamos el movimiento de un cuerpo rígido: introducimos la descripción de sus grados de libertad rotacionales en términos de los ángulos de Euler, obtenemos las ecuaciones de movimiento de Euler. Las ecuaciones de movimiento también las obtenemos por el método de Lagrange que en este caso resulta más simple. Identificando las integrales de movimiento, ejemplificamos el movimiento del cuerpo rígido con algunos ejemplos En particular, resolvemos los casos del rotor libre y el cuerpo rígido en el campo gravitacional con un punto fijo. Las referencias recomendadas en este tema son [1, 7, 12, 19, 15, 21, 22].

7.1. Cinemática del cuerpo rígido

El cuerpo rígido (CR) es un modelo teórico muy útil para representar a una gran variedad de objetos en los cuales su tamaño y forma permanecen constantes, independientemente de las condiciones dinámicas a las que se les sujete. El CR se define como aquel objeto en el cual la distancia entre cualquier par de partículas que lo forman permanece constante durante su movimiento, por ejemplo, una bola de billar, la consideramos intuitivamente un objeto rígido. Los objetos que pueden ser aproximados por este modelo de CR son muy variados y su movimiento es suficientemente bien descr5ito por este modelo;

sin embargo, cuando observamos con detalle este movimiento encontramos que sufre ligeras deformaciones durante una colisión o en su propio movimiento; estas pequeñas deformaciones son despreciables. Cuando un objeto macroscópico no cumple con estas condiciones se trata de un cuerpo elástico o deformable y requiere de descripciones especiales que escapan del presente contexto; tales teorías caen dentro del marco de la teoría de medios continuos.

Un CR definido de esta manera no es un objeto real; su rigidez sería infinita causando que todos sus coeficientes elásticos sean físicamente inaceptables: podría transmitir impulsos mecánicos a velocidad infinita, en contradicción con la teoría relativista y con la realidad; las señales mecánicas se transmiten en un cuerpo rígido típico a velocidades del orden de $10^4 \ \ m/s$; igualmente, la conducción de calor y otras propiedades físicas serían anómalas. Aún así, el modelo que se hace para describir un cuerpo rígido resulta de gran utilidad para el estudio de su dinámica. A estos cuerpos macroscópicos que podemos considerar como cuerpos rígidos, formados por una gran cantidad de partículas, átomos o moléculas, los consideramos también continuos y suponemos que en cada elemento diferencial de volumen el número de partículas es muy grande, de tal forma que se puede definir en cada punto de este cuerpo a la función densidad de masa. Un ejemplo de la aplicabilidad de estos conceptos, y de cómo el modelo físico debe ser ajustado, es el caso de un planeta del sistema solar: con respecto a su movimiento de traslación y rotación lo podemos considerar como un cuerpo rígido; cuando describimos a las ondas sísmicas en su interior o en su superficie, lo consideramos un cuerpo elástico; para describir las mareas gravitatorias debemos modelarlo como un objeto deformable; en ciertas condiciones a parte del planeta, su superficie y parte de su interior, debemos reconocerlo como un fluido.

El cuerpo rígido se define por medio de la siguiente condición:

$$r_{ij} - a_{ij} = 0 \qquad i \neq j = 1, 2, ..., n, \tag{7.1}$$

donde $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ es la distancia entre las partículas i y j que forman el CR, a_{ij} son constantes, n es el número de partículas en el CR. Esta propiedad de conservar sus distancias internas se mantiene en cualquier condición dinámica. Esta condición se satisface para objetos cuya deformación ante fuerzas de mediana o gran intensidad es muy pequeña o despreciable; tal sería el caso de una bola de billar o un cilindro de acero, y no sería el caso de una bola de plastilina o de gelatina. Las ecuaciones de restricción (7.1) son holonómicas, hay $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ de ellas, magnitud que superará a $3n$ para n grande; esto se debe a que muchas de esas constricciones resultan redundante. Para un cuerpo rígido son necesarios sólo 6 grados de libertad.

Para localizar unívocamente a cualquier punto del CR en cualquier instante del tiempo necesitamos tres coordenadas para ubicar su CM (o cualquier otro punto del CR), estas tres coordenadas determinan el movimiento de traslación. Un segundo punto en el CR se localizaría por dos coordenadas más, podrían ser dos ángulos α_1, α_2 que determinan la orientación respecto de un conjunto de ejes fijos en la primera partícula (ver figura (7.1.)), debido a que la distancia entre estos dos puntos es una constante conocida, Finalmente, bastaría una coordenada más para identificar a la partícula 3 (r_{23} y r_{13} son conocidas), esta tercera coordenada podría ser α_3, el ángulo que hace el vector r_{23} con respecto al eje z'. De esta forma la posición del cuerpo rígido está completamente especificada en cualquier instante t, todas las demás partículas estarían localizadas por medio de las restricciones (7.1), estos tres ángulos definen la orientación de CR. En otras palabras, el movimiento del CR se puede describir por 6 grados de libertad: 3 corresponden a su posición en el espacio (X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm}) y tres ángulos que definen su orientación con respecto a ejes arbitrariamente orientados. La excepción es un cuerpo CR lineal como una varilla muy delgada o una mancuerna unida por una varilla sin masa, en este caso són sólo necesarios 5 grados de libertad; éstos podrían ser las coordenadas del CM y dos ángulos que fijan su orientación.

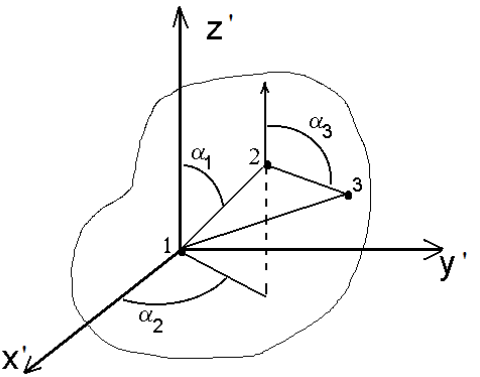

Figura 7.1. Un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad. La posición de un cuerpo rígido puede caracterizarse por medio de tres coordenadas para fijar un punto, el CM, dos ángulos fijan la posición del punto 2, $r_{12} = cte$, el punto 3 se puede fijar por el tercer ángulo, r_{13} y r_{23} son fijas.

De acuerdo a esta descripción se establece el teorema de Chasles [7, 12, 14]: la energía cinética de un CR tiene dos términos, la energía de la traslación del CM y la energía cinética de rotación medida desde el CM, de tal forma que se puede escribir así,

$$\mathbf{T} = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + T' \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right). \tag{7.2}$$

El primer término corresponde a los grados de libertad traslacionales, M es la masa total (del CM) y el segundo término es la energía cinética rotacional relativa al CM, que se escribe en función de los grados de libertad que definen su orientación en el espacio.

Si el CR rota en torno a un punto fijo o su CM se mueve a velocidad constante, en este punto se puede anclar un SIR.

Desde este sistema el momento angular toma la forma

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \tag{7.3}$$

$\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$, la posición y velocidad de cada partícula, se miden desde el SIR anclado a dicho punto. La velocidad de cada partícula se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_i = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i \qquad i = 1, 2, ...n \tag{7.4}$$

donde $\overrightarrow{\omega}$ es la velocidad de rotación instantánea medida desde el sistema fijo cuya orientación está fija en el espacio y n es el número de partículas que forman el cuerpo rígido[1]. De tal forma que

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i) \tag{7.5}$$

desarrollando el triple producto vectorial resulta que

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i \left(\mathbf{r}_i \cdot \overrightarrow{\omega} \right) \right) \ . \tag{7.6}$$

Las componentes de este vector se escriben así:

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right) - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i, \\
L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - y_i^2 \right) - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, \\
L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i + \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - z_i^2 \right).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

[1]No confundir el número de partículas n con el eje de rotación $\mathbf{n}$.

Definimos al tensor o matriz de inercia[2] como la siguiente cantidad:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} , \tag{7.8}$$

con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=i}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2\right) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - y_i^2\right) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - z_i^2\right) \\ I_{xy} &= I_{yx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\sum m_i y_i z_i \ . \end{aligned} \tag{7.9}$$

Podemos entonces escribir al momento angular en el sistema fijo (SIR) en el espacio como sigue:

$$\mathbf{L} = \mathbb{I}\ \overrightarrow{\omega}\ , \tag{7.10}$$

en esta ecuación los vectores $\mathbf{L}$ y $\overrightarrow{\omega}$ se escriben como matrices columna:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} , \qquad \overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} , \tag{7.11}$$

[2]El nombre más apropiado es tensor de inercia o representación matricial del tensor de inercia.

de tal forma que la ecuación (7.10) debe leerse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} , \tag{7.12}$$

esta ecuación matricial reproduce las formas algebraicas (7.7). Las componentes del tensor de inercia, se pueden escribir de forma abreviada así,

$$I_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 \delta_{\mu\nu} - x_{i\mu} x_{i\nu} \right) ; \quad \mu \, , \nu = x, y, z. \tag{7.13}$$

en esta notación $x_{i\mu}$ es la componente μ del vector de posición de la partícula i.

Si el cuerpo rígido se puede considerar como un continuo de materia, cada elemento de volumen dV tiene masa ρdV; para poder definir la función ρ es necesario que en cada elemento de volumen exista un número suficientemente grande de partículas. La suma en (7.13) se transforma a

$$I_{\mu\nu} = \int_V \rho \left(x, y, z \right) \left(r^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \right) dV \tag{7.14}$$

y la integral se realiza sobre el volumen que ocupa el cuerpo o bien donde la función ρ es diferente de cero.

La energía cinética del CR medida en el sistema fijo en el espacio se puede calcular fácilmente de su definición,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \ , \tag{7.15}$$

que podemos transformar a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i \right) \ . \tag{7.16}$$

También puede arreglarse a la forma siguiente:

$$T = \frac{\overrightarrow{\omega}}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \ . \tag{7.17}$$

Usando la ecuación (7.3) para el momento angular obtenemos que

$$T = \frac{\overrightarrow{\omega}}{2} \cdot \mathbf{L} \ ; \tag{7.18}$$

y usando la igualdad (7.10) se transforma a

$$T = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbb{I} \ \overrightarrow{\omega}, \tag{7.19}$$

que explícitamente es como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \left(\omega_x \, \omega_y \, \omega_z \right) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \ . \tag{7.20}$$

La energía cinética es un escalar y ω al lado derecho del tensor de inercia es un vector columna, mientras que a su lado izquierdo es un vector en forma de renglón de tal forma que este producto de matrices (o producto de tensores) resulta en un escalar.

La energía cinética medida desde un punto fijo al CR es puramente energía de rotación, de acuerdo con el teorema de Chasles. En la ecuación (7.19) podemos definir al eje instantáneo de giro tal que $\overrightarrow{\omega} = \mathbf{n}\omega$, $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección del eje instantáneo de giro y ω es la magnitud del vector $\overrightarrow{\omega}$. De esta forma:

$$2T = \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \overrightarrow{\omega} = \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n} \ . \tag{7.21}$$

De acuerdo a la regla de multiplicación de matrices la ecuación (7.21) se escribe como sigue:

$$2T = \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{\omega}^2 I \tag{7.22}$$

en donde hemos definido que

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu\nu=1}^{3} n_\mu m_k \left(r_k^2 \delta_{\mu\nu} - x_{k\mu} x_{k\nu} \right) n_\nu \qquad (7.23)$$

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{\mu\nu}^{3} \left(n_\mu n_\nu \delta_{\mu\nu} r_k^2 - \left(n_\mu x_{k\mu} \right) \left(n_\nu x_{k\nu} \right) \right) \ , \qquad (7.24)$$

debido a que el vector $\mathbf{n}$ tiene magnitud unidad tendremos que

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(r_k^2 - \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_k \right)^2 \right) , \qquad (7.25)$$

el escalar I se llama el momento de inercia alrededor del eje de giro. Si el sistema de partículas que forman el CR se puede considerar como un continuo de materia definido por su densidad de masa $\rho\left(x, y, z\right)$, el momento de inercia se escribe así:

$$I = \int \rho \left(r^2 - \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \right)^2 \right) dV \ ; \qquad (7.26)$$

una forma equivalente de escribir esta última ecuación es

$$I = \int \rho \left(\mathbf{r} \times \mathbf{n} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \times \mathbf{n} \right) dV \ = \int \rho \left| \left(\mathbf{r} \times \mathbf{n} \right) \right|^2 dV \ , \qquad (7.27)$$

y se interpreta así: el momento de inercia alrededor del eje de giro es la integral (suma) del producto de la masa ρdV de cada elemento de volumen por el cuadrado de su distancia $|(\mathbf{r} \times \mathbf{n})|$ al eje instantáneo de giro, de tal forma que si $\overrightarrow{\omega}$ cambia en el tiempo, también lo hará el momento de inercia I.

De esta forma la energía cinética se puede escribir simplemente como

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \ . \qquad (7.28)$$

El momento de inercia medido desde el origen $\mathbf{O}$ y eje de giro (e_0) caracterizado por el vector $\mathbf{n}$, puede ser relacionado muy fácilmente con otro origen (digamos el CM) y un eje $(\mathbf{e}_{CM})$ paralelo al eje $\mathbf{n}$; consideremos el diagrama de la figura (7.2.).

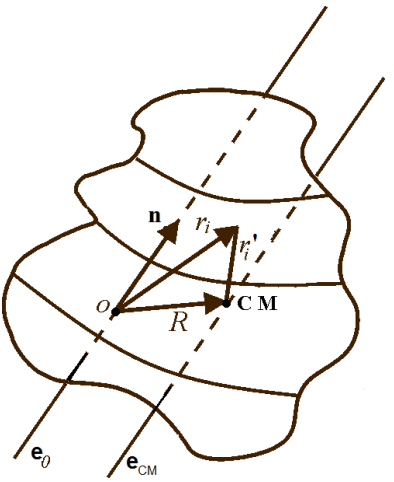

Figura 7.2. Unr eje pasa por el punto O y un eje paralelo pasa por el centro de masa.

Todo punto $\mathbf{r}_i$ medido desde el origen O se puede relacionar con la medición de este punto desde el CM, $\mathbf{r}_i'$, esto es,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i' \,,$$

de tal forma que el momento de inercia en O alrededor del eje $\mathbf{n}$ resulta ser

$$I_0 = \sum_i m_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}\right) \cdot \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}\right),$$

o bien que

$$I_0 = \sum_i m_i \left(\left(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i'\right) \times \mathbf{n}\right) \cdot \left(\left(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i'\right) \times \mathbf{n}\right) \tag{7.29}$$

podemos arreglar obteniendo que

$$I_0 = \sum_i m_i \left(\mathbf{R} \times \mathbf{n}\right)^2 + \sum_i m_i \left(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{n}\right)^2 + 2 \sum_i m_i \left(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{n}\right) \cdot \cdot \left(\mathbf{R} \times \mathbf{n}\right), \tag{7.30}$$

el último término es nulo pues $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{R}'_{CM}$; *i.e.*, es la posición del CM medido desde el CM. El segundo sumando del lado derecho es el momento de inercia medido desde el centro de masa y sobre el eje e_{cm} paralelo al eje e_0; finalmente obtenemos que,

$$I_0 = I_{CM} + M\left(\mathbf{R} \times \mathbf{n}\right)^2 \ ; \tag{7.31}$$

el momento de inercia I_0 es igual al momento de inercia medido desde el CM en un eje paralelo al de I_0 más el término Mb^2, donde b es la distancia entre ambos ejes. Este resultado se conoce con el nombre de *teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia*.

El tensor de inercia se representa por una matriz real y simétrica, esto significa que es diagonalizable por una matriz ortogonal, de tal forma que

$$\mathbb{I}_a = \mathbb{O}\mathbb{I}\mathbb{O}^{-1} = \mathbb{O}\mathbb{I}\widetilde{\mathbb{O}} \ . \tag{7.32}$$

La propiedad de ortogonalidad se puede escribir así

$$\mathbb{O}\mathbb{O}^{-1} = \mathbb{O}\widetilde{\mathbb{O}} = \widetilde{\mathbb{O}}\mathbb{O} = \mathbb{O}^{-1}\mathbb{O} = 1,$$

donde 1 es la matriz unidad en dimensión tres. La matriz diagonal tiene sólo tres parámetros independientes que son los valores propios (eigenvalores) de la matriz $\mathbb{I}$,

$$\mathbb{I}_a = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} . \tag{7.33}$$

Efectuar una transformación ortogonal es equivalente a rotar el sistema de ejes coordenados, *i.e.*, existen un sistema de ejes coordenados, que es una rotación del sistema original, en el cual el tensor de inercia es diagonal. Los teoremas conocidos del álgebra lineal para matrices reales y simétricas, que son un caso particular de las matrices autoadjuntas o hermitianas, nos aseguran que los tres valores propios son reales y los tres vectores propios

(eigenvectores) resultan ser mutuamente ortogonales; estos vectores propios definen las direcciones de los ejes coordenados en los cuales la matriz de inercia es diagonal.

Cuando el CR es simétrico, los ejes principales corresponden con los ejes de simetría. Cuando el CR no es geométricamente simétrico, aún así, tiene tres ejes perpendiculares que no son ejes de simetría, en los cuales la matriz de inercia es diagonal. Estos ejes se llaman los ejes principales de inercia, los ejes principales de simetría o simplemente *los ejes principales.*

Escogiendo a los ejes del sistema de referencia como los ejes principales simplifica las expresiones para el momento angular y la energía, que resultan ser:

$$\mathbf{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) = I_x\omega_x\hat{\imath} + I_y\omega_y\hat{\jmath} + I_z\omega_z\hat{k}, \tag{7.34}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) \ . \tag{7.35}$$

Si la velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$ está a lo largo de uno de estos ejes principales, digamos el eje z, obtenemos expresiones aún más simples,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (0, 0, I_z\omega_z) = \mathbf{L} = I_z\omega_z\hat{k}, \\ T &= \frac{1}{2}I_z\omega_z^2. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Supongamos que escribimos la matriz de inercia en el sistema de ejes principales, y que la dirección de $\overrightarrow{\omega}$ hace los ángulos α_1, α_2 y α_3 con respecto a estos ejes principales, el momento de inercia, ecuación (7.23), resulta ser

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n} = a_1^2 I_{xx} + a_2^2 I_{yy} + a_3^2 I_{zz} \tag{7.37}$$

donde $a_i = \cos\alpha_i$, siendo estos los cosenos directores del eje de giro respecto a los ejes principales, podemos arreglar esta última ecuación como sigue:

$$I_1 a_1^2 + I_2 a_2^2 + I_3 a_3^2 = 1 \ , \tag{7.38}$$

donde $I_i = I_{ii}/I$. La ecuación (7.38) representa la ecuación de un elipsoide en las variables a_1, a_2 y a_3 (recuérdese que $\overrightarrow{\omega}$ ó $\mathbf{n}$, son medidos desde el origen $\mathbf{O}$ en el sistema de eje principales, son funciones del tiempo), este elipsoide se llama el *elipsoide de inercia*. Éste proporciona información sobre la geometría y las distribuciones de masa.

7.2. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler son coordenadas muy útiles para definir de forma general a la rotación de un CR, con estas variables identificamos su posición en cada instante del tiempo y podemos escribir la función de Lagrange; y de ella, las ecuaciones de movimiento que describen la parte rotacional del movimiento del CR; esto es, escogeremos los ángulos de Euler como las coordenadas generalizadas asociadas a los tres grados de libertad rotacionales.

Cualquier rotación de un CR en el espacio tridimensional se puede construir por tres rotaciones sucesivas, los ángulos de Euler se definen por tres giros sucesivos ϕ, θ, ψ a lo largo de tres ejes que a continuación describimos:

1. El sistema cartesiano ortogonal x, y, z es rotado por el ángulo ϕ sobre el eje z originando el nuevo sistema x_1,y_1,z_1, tal cual se muestra en la figura (7.3.), el nuevo eje x_1 se llama la *línea de nodos,* la velocidad angular $d\phi/dt$ está dirigida a lo largo del eje z.

2. La segunda rotación se efectúa por un ángulo θ alrededor del nuevo eje x_1, esta rotación define al nuevo sistema x_2, y_2, z_2, ver figura (7.4.), la velocidad $d\theta/dt$ estará a lo largo de la línea de nodos (eje x_1).

3. La tercera y última rotación se efectúa por el ángulo ψ en torno al eje z_2, tal como se ilustra en la figura (7.5.), la velocidad $d\psi/dt$ está a lo largo del eje $z_2 = z'$.

El sistema final es x', y', z', es también ortogonal derecho por construcción. De esta forma los ángulos ϕ, θ, ψ determinan unívocamente la rotación del sistema x, y, z al x', y', z' y por lo tanto determinan la rotación de un sistema de ejes x', y', z' fijos al CR con respecto a un sistema de ejes fijos en el espacio x, y, z. Desde el punto de vista dinámico resulta conveniente escoger a los ejes x', y', z' como los ejes principales de inercia (ver siguientes secciones)

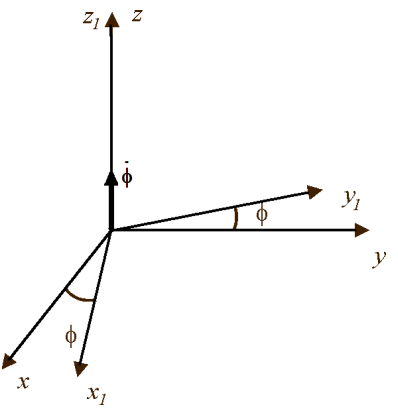

Figura 7.3. El sistema de coordenadas x, y, z tiene orientación fija en el espacio, el sistema intermedio x_1, y_1, z_1 se obtiene del primero por una rotación por el ángulo ϕ sobre el eje $z = z_1$, el nuevo eje x_1 es la línea de nodos.

Para la primera rotación $xyz \rightarrow x_1 y_1 z_1$, la transformación entre ambos sistemas de coordenadas se pude escribir como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\phi + y sen\,\phi \\ y_1 &= -x sen\,\phi + y\cos\phi \\ z_1 &= z_1\ , \end{aligned} \tag{7.39}$$

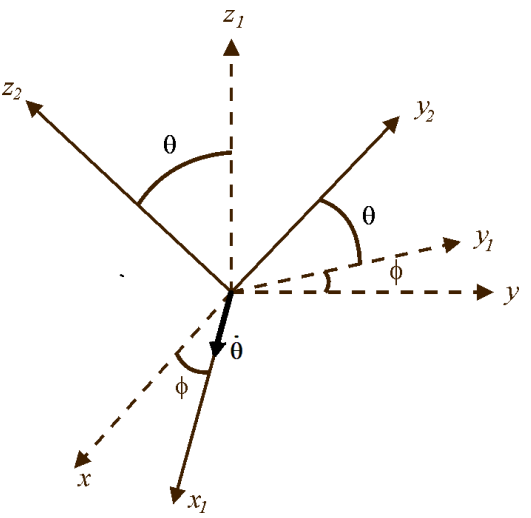

Figura 7.4. El segundo sistema intermedio se obtiene mediante una rotación sobre la línea de nodos por un ángulo θ.

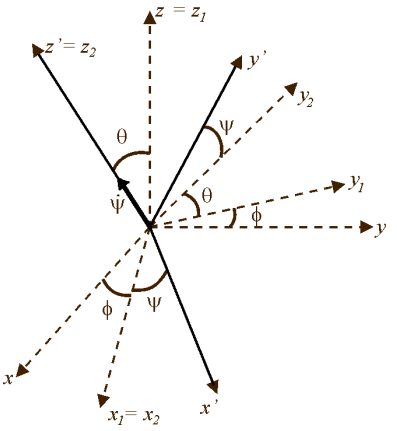

Figura 7.5. El sistema de ejes cartesianos fijo al cuerpo se obtiene del anterior por una rotación sobre el eje z_2 por el ángulo ψ. Note que los ejes z' y z_2 coinciden y que la velocidad $d\psi/dt$ está sobre el eje z'.

en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & sen\,\phi & 0 \\ -sen\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

y en forma abreviada la ecuación (7.40) resulta ser

$$\mathbf{X}_1 = \mathbb{R}_1 \mathbf{X}, \tag{7.41}$$

donde $\mathbb{R}_1$ es la matriz de rotación en (7.40), es una matriz ortogonal, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}$ son los vectores columna (matriz de 3×1) de la ecuación (7.39).

La segunda rotación se escribe como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\,\theta \\ 0 & -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{7.42}$$

y en forma abreviada será

$$\mathbf{X}_2 = \mathbb{R}_2 \mathbf{X}_1. \tag{7.43}$$

Análogamente la tercera rotación es

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\,\psi & 0 \\ -sen\,\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}_2 \tag{7.44}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbb{R}_3 \mathbf{X}_2\ . \tag{7.45}$$

La rotación completa será entonces

$$\mathbf{X}' = \mathbb{R}\mathbf{X} \tag{7.46}$$

donde

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_3 \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_1. \tag{7.47}$$

Multiplicando estas tres matrices obtenemos para la matriz $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi- \\ -\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\phi+ \\ +\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix} & \mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,\psi\cos\phi- \\ -\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\phi+ \\ +\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix} & \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{7.48}$$

La matriz $\mathbb{R}$ es la matriz de rotaciones en términos de los ángulos de Euler[3], es una matriz ortogonal, su determinante es $+1$ pues se trata de una rotación propia[4], de tal forma que

$$\mathbf{X}' = \mathbb{R}\mathbf{X} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{X}, \tag{7.49}$$

la segunda ecuación es la transformación ortogonal inversa; la condición de ortogonalidad se escribe como sigue:

$$\mathbb{R}^{-1} = \widetilde{\mathbb{R}}\,, \quad \mathbb{R}^{-1}\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbb{R}^{-1} = 1\,. \tag{7.50}$$

$\widetilde{\mathbb{R}}$ es la matriz transpuesta. Conviene señalar que el producto de matrices (7.47) no es conmutativo. Las matrices ortogonales forman grupo ante la operación de multiplicación de matrices, sin embargo el grupo no es conmutativo. Esto quiere decir que si las rotaciones parciales en la ecuación (7.47) se efectúan en un orden diferente loa rotación final no es la misma.

En resumen: la rotación de un CR con un punto fijo se puede identificar completamente en cualquier instante del tiempo por una transformación ortogonal en términos de los ángulos de

[3]Existen otros parámetros para determinar la rotación de un CR (ver por ejemplo las refs.[12, 17, 21]), sin embargo, ésta es la más familiar.

[4]Una transformación ortogonal impropia, que tiene determinante -1, corresponde a una inversión o a una reflexión de al alguno de los ejes.

Euler, éstos definen la transformación, son coordenadas generalizadas apropiadas para describir el movimiento. Esta afirmación es equivalente al teorema de Euler para el CR:

el movimiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un eje.

El problema mecánico concerniente a la rotación de un CR se reduce a conocer las variables que definen la rotación como funciones del tiempo:

$$\phi = \phi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \psi = \psi(t). \tag{7.51}$$

Estas funciones obedecen ecuaciones de movimiento, las cuales obtendremos a continuación.

7.3. Lagrangiana del cuerpo rígido

7.3.1. Ecuaciones de Euler

Con ayuda de los métodos desarrollados previamente podemos ahora estudiar el movimiento del CR. Si las restricciones que aparecen en el problema son holonómicas, podemos escribir directamente la función de Lagrange. Cuando el cuerpo rígido posee movimiento traslacional no constreñido y un movimiento rotacional no restringido, debemos usar un conjunto de seis grados de libertad ($f = 6$). Las coordenadas generalizadas que aparecen de forma natural son: tres coordenadas cartesianas para describir el movimiento traslacional y tres coordenadas rotacionales las que escogeremos como los tres ángulos de Euler para la rotación, *i.e.*, el conjunto de coordenadas generalizadas apropiadas para el CR son:

$$\{q\} = \{X, Y, Z, \theta, \phi, \psi\} \ . \tag{7.52}$$

La energía cinética, como ya mencionamos, se puede escribir como la energía cinética de traslación del CM y la energía cinética de rotación en torno al CM:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbb{I} \, \overrightarrow{\omega} \ , \tag{7.53}$$

por conveniencia escribiremos el tensor de inercia en el sistema de ejes principales y por lo tanto la velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$ debe expresarse en términos de los ángulos de Euler. Los ángulos de Euler serán los que transforman del sistema fijo en el espacio a la posición instantánea de los ejes principales.

Cuando el CR tiene un punto fijo o su traslación es a velocidad constante, podemos trasladar el origen de coordenadas a un sistema inercial que se mueva con el CR,; en este caso la energía cinética es puramente rotacional y si las fuerzas son conservativas, la lagrangiana del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_{x'}^2 + I_2 \omega_{y'}^2 + I_3 \omega_{z'}^2 \right) - V \left(\theta, \phi, \psi \right) \ . \tag{7.54}$$

Solamente faltaría escribir las componentes de la velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$ en el sistema de ejes principales x', y', z'. Comenzando con la rotación por ϕ, ω_ϕ sólo tiene componente z en el sistema original, de tal forma que las componentes de ω en el sistema x', y', z' se obtienen aplicando la rotación completa $\mathbb{R}$ a $\omega_\phi = d\phi/dt$ (ver figura (7.6.)); i.e.,

$$\left(\overrightarrow{\omega}'_\phi \right) = \begin{pmatrix} (\omega_\phi)_{x'} \\ (\omega_\phi)_{y'} \\ (\omega_\phi)_{z'} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} , \tag{7.55}$$

obteniendo que

$$\left(\overrightarrow{\omega}'_\phi \right) = \begin{pmatrix} sen\,\psi \ sen\,\theta \dot{\phi} \\ \cos\psi \, sen\theta \dot{\phi} \\ \cos\theta \dot{\phi} \end{pmatrix} \ . \tag{7.56}$$

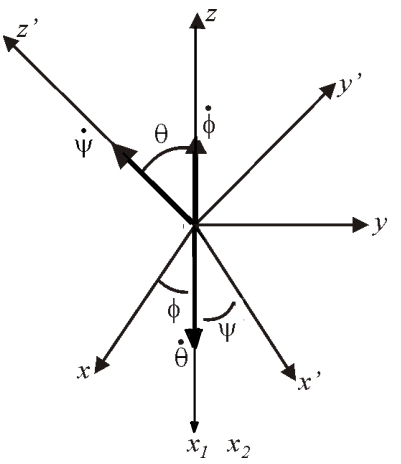

Figura 7.6. Las componentes de la velocidad angular de acuerdo con los ejes sobre los cuales se efectúan las rotaciones.

Análogamente, la rotación por θ sólo tiene componente a lo largo del eje $x_1 = x_2$, de tal forma que en el sistema de ejes principales x', y', z' las componentes de ω debidas a la rotación $\dot{\theta}$ serán obtenidas de aplicar solamente $\mathbb{R}_3$:

$$\left(\overrightarrow{\omega}'_\theta\right) = \begin{pmatrix} (\omega_\theta)_{x'} \\ (\omega_\theta)_{y'} \\ (\omega_\theta)_{z'} \end{pmatrix} = \mathbb{R}_3 \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.57}$$

obteniendo que

$$\left(\overrightarrow{\omega}'_\theta\right) = \begin{pmatrix} \cos\psi\dot{\theta} \\ -sen\psi\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.58}$$

La rotación por ψ sólo tiene componente en z', *i.e.*, no necesita

ser transformada,

$$\left(\overrightarrow{\omega}'_{\psi}\right) = \begin{pmatrix} (\omega_{\psi})_{x'} \\ (\omega_{\psi})_{y'} \\ (\omega_{\psi})_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} . \tag{7.59}$$

Sumando (7.56), (7.58) y (7.59), obtenemos el vector total de la velocidad angular en el sistema de ejes principales x', y', z',

$$\overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} sen\,\theta\ sen\,\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ sen\theta\cos\psi\dot{\phi} - sen\psi\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} . \tag{7.60}$$

Con esta expresión para $\overrightarrow{\omega}$ la lagrangiana (7.54) para un cuerpo rígido con un punto fijo se puede escribir como función de los grados de libertad ϕ, θ, ψ (las coordenadas generalizadas son los ángulos de Euler).

$$L = L\left(\theta, \phi, \psi\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \mathbb{I}\ \overrightarrow{\omega} - V\left(\theta, \phi, \psi\right), \tag{7.61}$$

$\mathbb{I}$ es el tensor de inercia en ejes principales.

Los momentos generalizados se obtienen por medio de las ecuaciones de Lagrange, ellos son las componentes del momento angular con respecto a: la línea de nodos ($x_1 = x_2$), el eje z y el eje z' respectivamente, de esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= P_{\phi} = \mathbf{L}\cdot\widehat{k} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= P_{\theta} = \mathbf{L}\cdot\widehat{i_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= P_{\psi}, = \mathbf{L}\cdot\widehat{k'}. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Donde $\mathbf{L}$ es el momento angular del CR, los vectores unitarios $\widehat{k}$, $\widehat{i_1}$ y $\widehat{k'}$ en los ejes, z, x_1, z' así como las fuerzas generalizadas

$-\frac{\partial V}{\partial \phi}, -\frac{\partial V}{\partial \theta}, -\frac{\partial V}{\partial \psi}$ son las componentes del torque en los ejes mismos ejes z, x_1, z'. Notemos con atención que solamente $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$ es la componente del torque en uno de los ejes principales z'; en este eje las ecuaciones de Lagrange como función de las fuerzas generalizadas resulta ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{z'} = N_{z'} \ ; \tag{7.63}$$

aplicando estas derivadas a la lagrangiana (7.61) con la forma (7.60) para las componentes de ω obtenemos

$$I_3 \dot{\omega}_{z'} - \omega_{x'}\omega_{y'}\left(I_1 - I_2\right) = Q_{z'} \ . \tag{7.64}$$

Los ejes x', y', z' se seleccionan arbitrariamente, si en lugar de x', y', z' hubiéramos escrito y', z', x' sería equivalente a permutar cíclicamente los índices en (7.64); haciendo estas permutaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_{x'} - \omega_{y'}\omega_{z'}\left(I_2 - I_3\right) &= N_{x'} \\ I_2 \dot{\omega}_{y'} - \omega_{z'}\omega_{x'}\left(I_3 - I_1\right) &= N_{y'} \\ I_3 \dot{\omega}_{z'} - \omega_{x'}\omega_{y'}\left(I_1 - I_2\right) &= N_{z'} \ . \end{aligned} \tag{7.65}$$

La tercera de estas ecuaciones es la ecuación de Lagrange para la coordenada generalizada ψ; las otras dos no son las ecuaciones de Lagrange para θ y ϕ, además,$-\frac{\partial V}{\partial \theta}$ y $-\frac{\partial V}{\partial \phi}$ no son las componentes del torque en los ejes x' o y'. Las ecuaciones (7.65) se llaman *las ecuaciones de Euler para un CR con un punto fijo.*

Otra forma directa de obtener las ecuaciones de Euler para el CR es usar la transformación de un sistema fijo en el espacio a un sistema rotando (ver sección 3.1, ecuación (3.15)); para todo vector $\mathbf{A}$ se cumple que

$$\left(\dot{\mathbf{A}}\right)_{SIR} = \left\{\dot{\mathbf{A}}'\right\}_{rot} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{A}' \ , \tag{7.66}$$

$\overrightarrow{\omega}$ es la velocidad angular de rotación, en esta ecuación hemos puesto que $\mathbf{R} = 0$; es decir, los orígenes de el SIR fijo en el espacio y el SNIR, fijo en el cuerpo, coinciden. En el sistema fijo en el espacio aplicamos directamente la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{N} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{SIR} = \left(\frac{d\mathbf{L}^{'}}{dt}\right)_{rot} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{L}', \tag{7.67}$$

con $\mathbf{L}$ el momento angular y $\mathbf{N}$ el torque medido en el SIR, $\mathbf{L}'$ es el momento angular medido en el sistema de ejes fijos al cuerpo. Procedamos ahora con cautela, esta última expresión es una ecuación vectorial que conecta a las cantidades medidas en estos dos sistemas; si proyectamos a los vectores de la ecuación (7.67) sobre los ejes fijos al cuerpo $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ obtenemos que

$$N_{z'} = \frac{dL_{z'}}{dt} + \omega_{y'} L_{x'} - \omega_{x'} L_{y'} \ , \tag{7.68}$$

$N_{z'}$ es la componente del torque medido en el sistema fijo en el espacio y proyectado en el eje fijo al cuerpo, que en este caso es $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$. Un proceso análogo para las componentes x', y' proporciona las restantes ecuaciones, que no son tan fáciles de interpretar . Escribiendo $\mathbf{L}^{'} = \mathbb{I}\omega$ para los ejes fijos al cuerpo (ecuación (7.34)) y arreglando términos obtenemos que

$$\begin{aligned} N_{x'} &= I_x \dot{\omega}_{x'} - \omega_{y'}\omega_{z'}\left(I_y - I_z\right) \\ N_{y'} &= I_y \dot{\omega}_{y'} - \omega_{z'}\omega_{x'}\left(I_z - I_x\right) \\ N_{z'} &= I_z \dot{\omega}_{z'} - \omega_{x'}\omega_{y'}\left(I_x - I_y\right) \ , \end{aligned} \tag{7.69}$$

éstas son las ecuaciones de Euler para el CR con un punto fijo. Nótese que $\frac{d}{dt} I_z \omega_{z'} = I_z \dot{\omega}_{z'}$ es debido a que en el sistema de ejes principales fijos al cuerpo $\mathbb{I}$ es diagonal y es constante. Como debíamos haber esperado, la dinámica de Newton y la dinámica de Lagrange proporcionan las mismas ecuaciones de movimiento, en este caso el formalismo newtoniano resultó de fácil aplicación debido a que no hay fuerzas de restricción que

deban ser eliminadas. Sin embargo, para el caso del CR en un campo gravitacional y con un punto fijo el método de Newton resulta muy tedioso, ese caso ilustrará muy bien la utilidad del método de Lagrange.

7.3.2. Péndulos

Péndulo de torsión

Un ejemplo simple e ilustrativo es el péndulo de torsión, se trata de un cilindro colgando de un soporte fijo por medio de un alambre delgado que responde elásticamente y de forma lineal a un torque aplicado, dicho sistema se ilustra en la figura (7.7.). El cilindro está restringido a rotar sobre su eje de simetría. La fuerza de gravedad está balanceada por la tensión en el alambre, la única fuerza aplicada es la fuerza elástica que tiende a regresar al objeto a su posición de equilibrio, en completa analogía a como lo hace un resorte con una partícula.

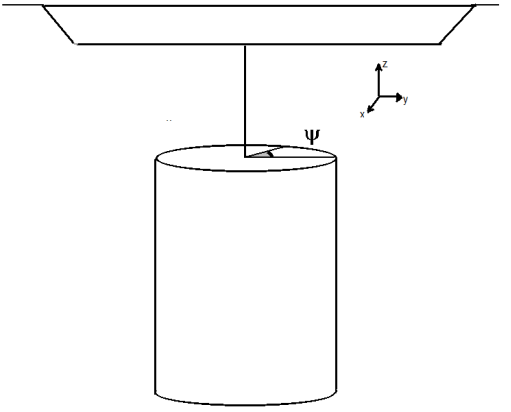

Figura 7.7. Un cilindro cuelga de un alambre delgado, el movimiento es una rotacion en torno al eje z.

El momento de la fuerza de restitución es

$$N_z = -\tau\psi, \tag{7.70}$$

donde ψ es el ángulo de rotación en torno al eje z (ver ecuaciones (7.40) y (7.60)) y τ es el coeficiente de restitución lineal, también llamado coeficiente de torsión.

Tanto $\omega_{x'}$ como $\omega_{y'}$ son nulas y las ecuaciones de Euler nos conducen a

$$I_z\dot{\omega}_{z'} = N_z, \qquad \rightarrow \qquad I_z\ddot{\psi} = -\tau\psi. \tag{7.71}$$

La solución a esta ecuación es la de un oscilador armónico simple de frecuencia angular $\omega_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{I_z}}$. Claramente su movimiento es oscilatorio y de ahí su nombre de péndulo de torsión.

Péndulo físico

Un CR se restringe a rotar sobre un eje fijo como se muestra en la figura (7.8.), la masa total es M, la distancia entre el eje de giro, que hacemos coincidir con el eje x fijo en el espacio, y el CM es ℓ, el momento de inercia medido desde el origen por el que pasa el eje de giro es $I_x = I$. Consideremos como eje de giro a un eje horizontal de tal forma que el CM del CR se mueve en un plano vertical. Las ecuaciones de Euler (7.69) para este objeto se reducen a

$$I_{x'}\dot{\omega}_{x'} - \omega_{y'}\omega_{z'}\left(I_y - I_z\right) = N_x, \tag{7.72}$$

las restricciones sobre el CR imponen que $\omega_{y'} = \omega_{z'} = 0$, de tal forma que la única ecuación de movimiento se reduce a

$$I\ddot{\theta} = N_x = -Mg\ell sen\theta, \tag{7.73}$$

en esta ecuación ya pusimos que $\omega_{x'} = \dot{\theta}$ y que el momento de la fuerza en la dirección x es $-MgL\text{sen}\theta$. Para pequeñas oscilaciones esta ecuación es nuevamente la ecuación armónica

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell}{I}\theta = 0, \tag{7.74}$$

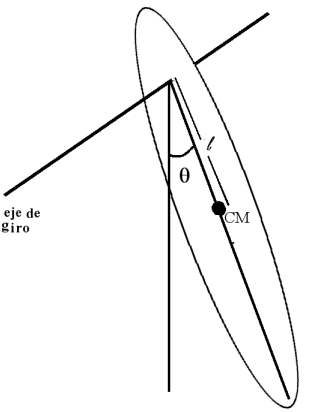

Figura 7.8. Un cuerpo rígido se restringe a rotar sobre un eje fijo, la distancia entre el eje de giro y el CM es ℓ.

y por lo tanto su frecuencia angular y periodo son:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}} \qquad \text{y} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg\ell}}. \tag{7.75}$$

El movimiento también es armónico (pendular), su periodo depende de su momento de inercia I medido desde el punto de suspensión y con respecto al eje de giro, mientras mayor sea este momento de inercia mayor será el periodo; inversamente, a mayor distancia entre el eje de giro y el CM menor será el periodo. Nótese que el momento de inercia es siempre proporcional a la masa y algún factor geométrico, de tal forma que el periodo del péndulo no depende de la masa pero sí de un factor geométrico, este resultado es similar al del péndulo simple. Si las oscilaciones no son pequeñas el péndulo se vuelve no-isócrono y se trata de manera análoga a como lo hicimos en el capítulo 2.

7.3.3. Rotor libre

Consideremos el movimiento de un CR libre de fuerza, i.e., sin torque. El movimiento traslacional es el movimiento uniforme del CM, este punto es un SIR desde el cual se puede describir fácilmente la rotación de CR. Podemos colocar al sistema de referencia fijo al cuerpo en los ejes principales de inercia, las ecuaciones de Euler se convierten en:

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_{x'} - \omega_{y'}\omega_{z'}\,(I_y - I_z) &= 0 \\ I_y\dot{\omega}_{y'} - \omega_{z'}\omega_{x'}\,(I_z - I_x) &= 0 \\ I_z\dot{\omega}_{z'} - \omega_{x'}\omega_{y'}\,(I_x - I_y) &= 0\ . \end{aligned} \tag{7.76}$$

Por no existir fuerzas aplicadas, el momento angular es una constante,

$$(\mathbf{L})_{SIR} = cte \tag{7.77}$$

proporcionando tres integrales de movimiento. $(\mathbf{L})_{SIR}$ es el momento angular medido con orientación fija en el espacio. Además, la función de Lagrange no depende explícitamente del tiempo (ver ecuación (7.61)), entonces, la hamiltoniana se conserva, en este caso corresponde con la energía cinética del CR,

$$H = E = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}\cdot\mathbb{I}\overrightarrow{\omega} = cte. \tag{7.78}$$

Usando las integrales de movimiento mencionadas es posible reducir el problema hasta una solución formal en términos de integrales elípticas (ver por ejemplo refs.[12, 17, 19]).

Para ilustrar la dinámica de un CR libre de fuerzas, consideraremos el caso sencillo de un cuerpo simétrico, cuando dos de sus momentos de inercia son iguales; es usual escoger los ejes principales de tal forma que $I_x = I_y$, la dirección z se escoge como el eje de simetría. En este caso las ecuaciones de Euler se

reducen a

$$\begin{aligned} I_z\dot{\omega}_z &= 0 \\ I_x\dot{\omega}_x &= (I_x - I_z)\,\omega_y\omega_z \\ I_x\dot{\omega}_y &= -(I_x - I_z)\,\omega_x\omega_z \ ; \end{aligned} \tag{7.79}$$

ω_z resulta ser una constante, por comodidad hemos omitido las primas en los ejes fijos al cuerpo. De las restantes ecuaciones podemos eliminar, digamos ω_y, derivando la segunda de las ecuaciones (7.79) y sustituyendo en la tercera; recordando que $\omega_{z'}$ es constante, obtenemos

$$\ddot{\omega}_x + \left(\omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x}\right)^2 \omega_x = 0 \ , \tag{7.80}$$

la cual es una simple ecuación armónica con solución

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_0 \ sen\,(\omega_p t + \alpha) \\ \omega_p &= \frac{\omega_z\,(I_x - I_z)}{I_x} = \omega_z A \ , \end{aligned} \tag{7.81}$$

A es el coeficiente de asimetría y mide que tan asimétrico es el CR, $A = 0$ es un CR totalmente simétrico simétrico este coeficiente puede ser positiva o negativa; las constantes ω_0 y α dependen de las condiciones iniciales, mientras más simétrico sea el cuerpo más pequeño es este factor y más pequeña es la frecuencia ω_p. Escogiendo apropiadamente el origen del tiempo, podemos hacer $\alpha = 0$. La solución para ω_y se obtiene al sustituir la ecuación (7.81) en la segunda de las ecuaciones (7.79), con lo que obtenemos que

$$\omega_y = \omega_0 \cos\omega_p t \ , \tag{7.82}$$

la solución final para $\overrightarrow{\omega}$ (en el sistema de ejes fijos al cuerpo y orientado de acuerdo a los ejes principales de inercia) es la siguiente:

$$\overrightarrow{\omega} = (\omega_0 \ sen\,\omega_p t, \quad \omega_0 \cos\omega_p t, \quad \omega_z) \ . \tag{7.83}$$

Es fácil observar que

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2 = cte \tag{7.84}$$

y que

$$|\overrightarrow{\omega}|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = cte\ ,$$

esta propiedad se ilustra en la figura (7.9.), el vector $\overrightarrow{\omega}$ de magnitud constante precede en torno a $\omega_{z'}$ (el eje de simetría), la frecuencia con la que precede es ω_p.

El movimiento del rotor simétrico libre de fuerzas es la precesión en torno al eje de simetría, la precesión es regular. La velocidad de precesión será lenta o rápida dependiendo del factor de asimetría A. Un rotor libre casi esférico precede muy lentamente mientras que uno con gran asimetría como una barra larga lo hace muy rápidamente.

Las constantes del movimiento $\mathbf{L}^2$ y E se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}|^2 &= I_x^2\omega_0^2 + I_z^2\omega_{z'}^2 = cte \\ E &= \frac{1}{2}I_x\omega_0^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 = cte\ , \end{aligned} \tag{7.85}$$

de tal forma que las constantes[5] ω_z y ω_0 se puede expresar como sigue:

$$\omega_z^2 = \frac{2EI_x - L^2}{I_z\,(I_x - I_z)} \tag{7.86}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2EI_z - L^2}{I_x\,(I_z - I_x)} \tag{7.87}$$

y por lo tanto $\overrightarrow{\omega}$ en (7.83) está totalmente determinada por las condiciones iniciales L^2 y E. El caso particular de un rotor libre simétrico es muy simple, de las ecuaciones (7.76) obtenemos que $\overrightarrow{\omega} = \mathbf{cte}$. Este es el caso de una esfera, un cubo o un octaedro regular, estos objetos no preceden porque no tienen asimetría, recordemos que se trata de rotación libre de fuerzas.

[5]Recordemos que estas constantes también son integrales de movimiento (ver sección 4.4).

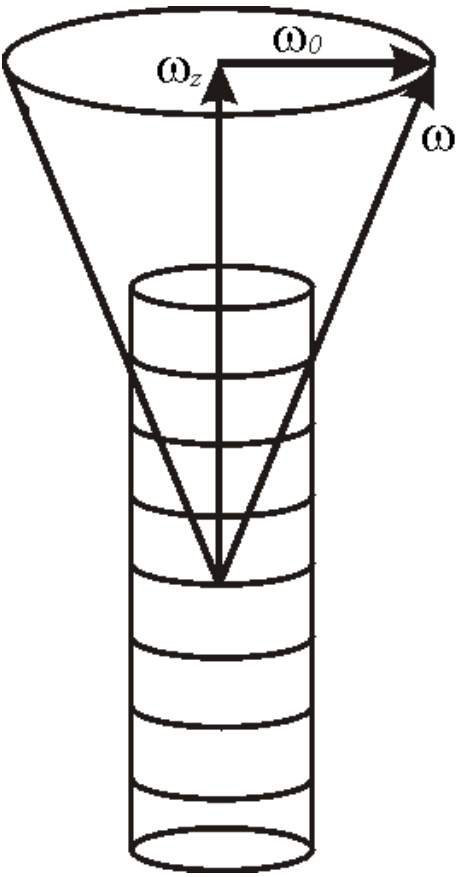

Figura 7.9. En el rotor simétrico ($I_x = I_y$) libre de fuerzas, el vector de velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$ precede en torno al eje de simetría z' la componente de la velocidad angular en esta dirección $\omega_{z'}$, es una constante.

7.4. El cuerpo rígido simétrico con un punto fijo

El caso en el que la gravedad actúa sobre un cuerpo rígido simétrico ($I_x = I_y$) con un punto fijo, puede ser también estudiado con cierta facilidad; en este caso hay un torque aplicado y el hecho de que tenga un punto fijo causa una fuerza de restricción (ver figura (7.10.)). Si aplicamos el formalismo newtoniano, esta fuerza debe ser eliminada de la descripción, desde este punto de vista las ecuaciones de Euler para el CR resultan más complejas. Sin embargo, el formalismo de Lagrange resulta muy apropiado, gracias a que las restricciones son holonómica la fuerza de restricción es automáticamente eliminada de la descripción mecánica. Debido a que el CR tiene un punto fijo, la energía de traslación es nula y la rotación está completamente especificada por las coordenadas generalizadas ϕ, θ, ψ. El sistema de ejes coordenados fijos al cuerpo lo escogemos coincidiendo con los ejes principales y el origen de este sistema será el punto fijo del CR; los ángulos de Euler (figura (7.5.)) se definen como aquéllos que rotan del sistema fijo en el espacio al de los ejes fijos al CR.

El método de Lagrange nos permite obtener fácilmente las ecuaciones de movimiento, la lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \left(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2\right) + \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 - V\left(\theta, \phi, \psi\right) \ , \tag{7.88}$$

las componentes de la velocidad angular en el sistema fijo al cuerpo están dadas por la ecuación (7.60) y la función potencial es simplemente

$$V = mgz = mg\ell \cos\theta \ , \tag{7.89}$$

donde ℓ es la distancia del CM al origen que colocamos en el punto fijo, m es la masa total del CR, de tal forma que la función

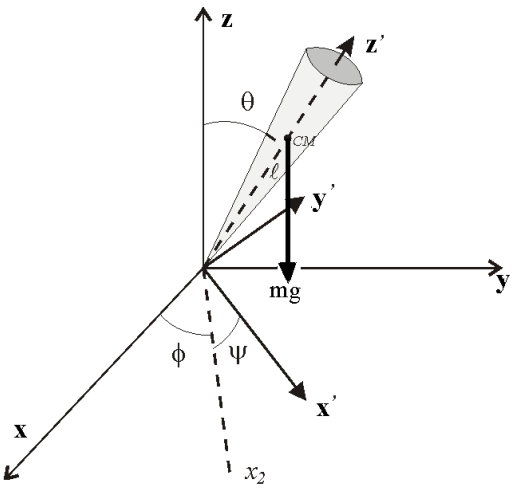

Figura 7.10. Un cuerpo rígido simétrico tiene un punto fijo en el origen, la fuerza de gravedad causa un torque que apunta en la dirección de la línea de nodos.

de Lagrange se escribe como sigue:

$$\mathcal{L}\left(\theta,\phi,\psi,\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi}\right) = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}+ \right.$$
$$\left. + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - mg\ell\cos\theta\ . \qquad (7.90)$$

En esta lagrangiana observamos inmediatamente que dos de las coordenadas generalizadas, ϕ y ψ, son ignorables (cíclicas), por lo tanto los momentos generalizados (momentos canónicos conjugados) asociados a ϕ y ψ, son integrales de movimiento:

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_3\cos\theta\dot{\psi} = I_1 c_1 \qquad (7.91)$$

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = I_3\omega_{z'} = I_1 c_2, \qquad (7.92)$$

las constantes c_1 y c_2 en estas ecuaciones se escogen para simplificar las ecuaciones subsecuentes, se miden en unidades del momento angular. Estos momentos generalizados corresponden a las componentes del momento angular en el eje z fijo en el espacio y en el eje z' fijo en el cuerpo, sobre ellos se definen las rotaciones por ϕ y ψ respectivamente (ver fig(7.6.)); la constancia de estas cantidades se debe a que el torque debido a la fuerza de gravedad está en la línea de nodos que, por construcción, es perpendicular a los ejes z y z'. Esto también significa que la lagrangiana es invariante ante rotaciones en los ejes z y z'. La ecuación de movimiento restante para la variable θ es:

$$\frac{d}{dt}\left(I_1\dot{\theta}\right) - (I_1\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta + \\ + mg\ell\operatorname{sen}\theta) = 0. \tag{7.93}$$

La función de Lagrange es también invariante ante traslaciones en el tiempo $\left(\frac{\partial L}{\partial t}=0\right)$, por lo tanto, la función de Hamilton también es integral de movimiento, el sistema es conservativo. En este caso las fuerzas son derivables de un potencial dependiente de las coordenadas generalizadas y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades, esto implica que la hamiltoniana se reduce a la energía mecánica total E. Entonces, las tres integrales de movimiento que nos permiten resolver el problema son:

$$E = T + V = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sen^2\theta\dot{\phi}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)^2 + \\ + mg\ell\cos\theta = cte\ , \tag{7.94}$$

$$p_\phi = \left(I_1 sen^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_3\cos\theta\dot{\psi} = cte, \tag{7.95}$$

$$p_\psi = I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right) = cte, \tag{7.96}$$

estas tres ecuaciones están acopladas, una es de segundo orden y dos de primero; ellas proporcionarán la solución al movimiento de CR en el campo gravitacional con un punto fijo. En este caso podemos resolver el problema hasta una cuadratura.

De las momentos generalizados constante despejamos a $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ ((7.91) y (7.92)) obteniendo que

$$\dot{\phi} = \frac{c_1 - c_2 \cos\theta}{sen^2\theta} \,, \tag{7.97}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 c_2}{I_3} - \frac{c_1 \cos\theta - c_2 \cos^2\theta}{sen^2\theta}. \tag{7.98}$$

Es decir, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ se pueden conocer si se conoce $\theta = \theta(t)$. De la conservación de la energía podemos obtener formalmente la solución para $\theta = \theta\,(t)$. Para hacer esto notamos primero que $\omega_{z'}^2$ es una constante debido a que

$$p_\psi = I_3 \omega_{z'} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \right) = I_1 c_2 \,, \tag{7.99}$$

de tal forma que podemos definir una energía reducida

$$E_r = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \, sen^2\,\theta \right) + mg\ell \cos\theta \,, \tag{7.100}$$

esta ecuación la podemos arreglar definiendo dos nuevas constantes

$$k_1 = \frac{2E_r}{I_1} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{2mg\ell}{I_1} \,; \tag{7.101}$$

usando la ecuación (7.97) obtenemos que

$$\dot{\theta}^2 \, sen^2\,\theta = sen^2\,\theta \,(k_1 - k_2 \cos\theta) - (c_1 - c_2 \cos\theta)^2 \,, \tag{7.102}$$

finalmente cambiando de variable a

$$u = \cos\theta, \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{i - u^2}}$$

arribamos a

$$\dot{u}^2 = \left(1-u^2\right)\left(k_1 - k_2 u\right) - \left(c_1 - c_2 u\right)^2 = f\left(u\right), \qquad (7.103)$$

es decir, $\dot{u}$ es función de $\cos\theta$, y tiene formalmente la siguiente solución:

$$t = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(k_1 - k_2 u\right) - \left(c_1 - c_2 u\right)^2}}\,. \qquad (7.104)$$

Esta solución, junto con las ecuaciones (7.97) y (7.98), proporciona la solución completa del problema, con ellas obtendremos los ángulos de Euler $\theta(t), \phi(t)$ y $\psi(t)$ que identifican el movimiento del CR, nótese que esta solución sólo depende de las constantes c_1, c_2, k_1 y k_2 que están relacionadas con las constantes de movimiento que posee este sistema. La solución de la ecuación (7.104) es una integral elíptica que sólo podemos conocer numéricamente.

Sin embargo, la solución al CR simétrico con un punto fijo puede ser analizada cualitativamente. La ecuación (7.103) puede arreglarse a:

$$\dot{u}^2 = k_2 u^3 - \left(k_1 + c_2^2\right) u^2 + \left(2c_1 c_2 - k_2\right) u + k_1 - c_1^2\,, \quad (7.105)$$

un polinomio cúbico en u. Debido a que k_2 es positiva tendremos las siguientes condiciones para $\dot{u}^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{u}^2 &\longrightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad u \longrightarrow -\infty \\
\dot{u}^2 &\longrightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad u \longrightarrow \infty \\
\dot{u}^2\left(\theta = \pi\right) &= -\left(c_1 + c_2\right)^2 \\
\dot{u}^2\left(\theta = 0\right) &= -\left(c_1 - c_2\right)^2 \\
\dot{u}^2\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) &= k_1 - c_1^2\,,
\end{aligned} \qquad (7.106)$$

la forma específica de la función $\dot{u}^2$ depende de las condiciones iniciales (que a su vez dependen de los valores de E, y $\mathbf{L}$) y

de las propiedades de inercia del CR (I_1, I_3, m). Una posible forma de esta función que cumple con las condiciones (7.106) se muestra en la figura (7.11.). Las raíces de $\dot{u}^2$ son u_1, u_2 y u_3. Si las tres raíces son reales, al menos una de ellas es mayor que $+1$; si hay otras dos raíces reales ellas estarían ubicadas en el rango $-1 \leq u \leq 1$, teniendo en cuenta que los valores físicamente aceptables son aquéllos para los cuales $u \in [-1, 1]$; además, la región del posible movimiento del CR es aquélla donde $\dot{\theta}$ es real, implicando que $\dot{u}^2 \geq 0$; en la gráfica esta región la mostramos sombreada. En los puntos u_1 y u_2 de la gráfica la velocidad $\dot{u}$ se hace cero y regresa cambiando de signo.

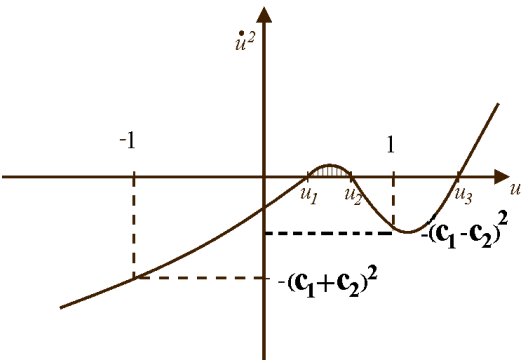

Figura 7.11. En la gráfica se muestra un ejemplo para la función $\dot{u}^2$ que describe el movimiento del cuerpo rígido simétrico, solamente son posibles los valores en la región donde $\dot{u}^2 \geqslant 0$. Los parámetros que determinan la forma de la curva y sus raíces dependen de las condiciones iniciales y de los coeficientes de inercia.

Para cada uno de los posibles valores de θ es posible calcular $\dot{u}$ (equivalentemente $\dot{\theta}$), $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$. A la velocidades: $< \dot{\psi}$ se le llama rotación, a $\dot{\phi}$ precesión y a $\dot{\theta}$ nutación

Si dibujamos la trayectoria que seguiría el eje del CR sobre una esfera de radio unidad, centrada en el punto fijo del CR y

cuyo eje vertical es el eje z fijo en el espacio, podemos representar gráficamente el movimiento de dicho eje, ver figura (7.12.), los ángulos θ y ϕ corresponden a los ángulos de Euler que definen la rotación.

Dependiendo de las condiciones iniciales es posible tener tres casos:

1. *a*) supongamos $c_1 > c_2$, es decir $p_\phi > p_\psi$, por lo tanto

$$\dot{\phi} = \frac{c_1 - c_2 \cos\theta}{sen^2\theta} > 0 \tag{7.107}$$

siempre es positiva; el movimiento será tal que el eje del CR precede regularmente pero no homogéneamente, precede en la dirección positiva de ϕ, los valores de $\dot{\theta}$ son cero en las dos raíces $\theta_1 = \cos^{-1} u_1$ y $\theta_2 = \cos^{-1} u_2$ y cambia de signo al llegar a ellas, el CR precede y nuta, *i.e.*, el eje del trompo sube y baja (cabecea o nuta) mientras precede, el eje de simetría del CR rota a velocidad $\dot{\psi}$, esta velocidad no es una constante. *b*) Un caso completamente equivalente es cuando $p_\phi < p_\psi$, en este caso $\dot{\phi}$ puede ser negativa y el trompo precede en la dirección contraria al caso anterior, esto quiere decir que la dirección de precesión está determinada por el sentido de la velocidad $\dot{\psi}$. Al igual que en otros sistemas simples, el movimiento del CR intercambia energía cinética con energía potencial, cuando baja pierde energía potencial y gana cinética y viceversa.

2. El segundo caso corresponde a $c_1 < c_2$. Esta condición permite que la velocidad $\dot{\phi}$ se vuelva negativa para algún rango de valores de θ (ver ecuación (7.97)); este movimiento se ilustra en la segunda parte de la figura. El eje del trompo nuta y su precesión es regresiva en un intervalo pero el promedio de $\dot{\phi}$ no puede ser cero, i.e. avanza en

la dirección positiva (o negativa) mientras que el eje de simetría del CR rota a velocidad $\dot{\psi}$.

3. El último caso corresponde a $\dot{\phi} = 0$ en $\theta = \theta_1$ (para el valor apropiado de $c_1 = c_2 \cos\theta_1$, ver ecuación 7.97; en θ_1 tanto $\dot{\phi}$ como $\dot{\theta}$ son cero) y el movimiento tiene una cúspide (movimiento cuspidal), el eje del CR rota a velocidad $\dot{\psi}$; este tipo de movimiento se ilustra en la última parte de esta figura.

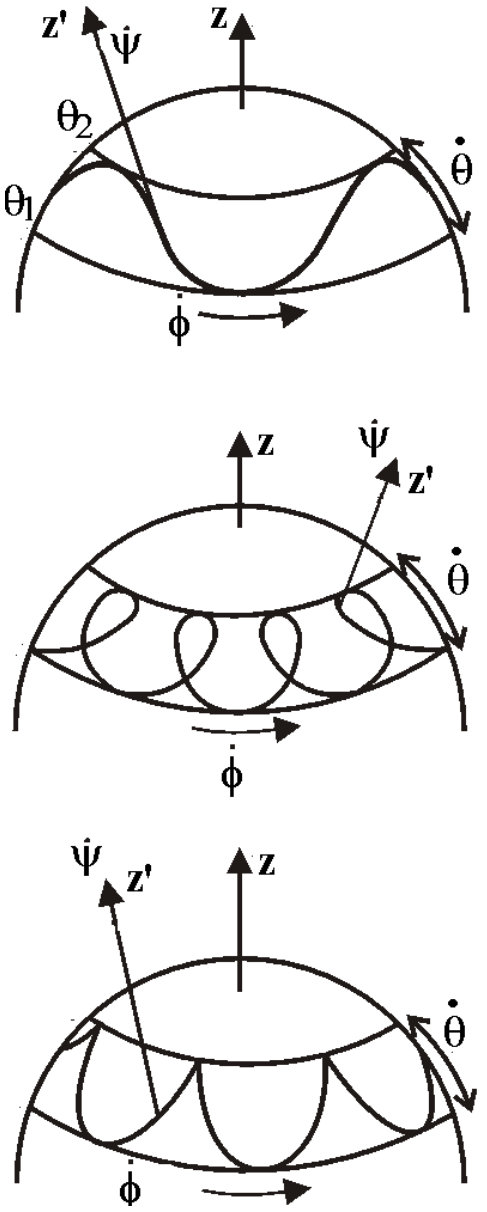

Figura 7.12. Diagrama que muestra los posibles movimientos del eje de simetría de un cuerpo rígido simétrico.

7.5. Ejercicios

1. Obtenga el tensor de inercia y los ejes principales para los siguientes cuerpos rígidos homogéneos de masa total M:

   a) Un cilindro de radio R y largo L.

   b) Un cono de las mismas dimensiones.

   c) Una esfera de radio R.

   d) Un cascarón esférico de radio R y de espesor despreciable.

2. Haga las operaciones necesarias para demostrar que la matriz de rotación en términos de los ángulos de Euler es la ecuación (7.48). Demuestre que es una matriz ortogonal.

3. Muestre, con un ejemplo, que las matrices de rotación no conmutan.

4. Demuestre que las matrices de rotación forman un grupo no conmutativo.

5. Suponga que una lámina rectangular de longitud L y ancho d se coloca verticalmente y se pone a oscilar como un péndulo físico, si el punto de suspensión es el punto medio de la arista superior: *a*) Aplique las ecuaciones de Euler y obtenga sus ecuaciones de movimiento. *b*) ¿Depende el periodo de la masa del péndulo? *c*) Si las oscilaciones no son pequeñas, obtenga la corrección de primer orden para el periodo del péndulo.

6. Demuestre que en el caso del rotor libre la función de Hamilton es la energía.

7. Obtenga la hamiltoniana del CR simétrico con un punto fijo y de ella las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

8

OSCILACIONES PEQUEÑAS

Existe una gran variedad de sistemas mecánicos que se encuentran en un estado dinámico cuya energía está muy cerca de un mínimo en la curva del potencial, un punto de equilibrio estable, la primera aproximación que se hace es la aproximación armónica. Usualmente, sus ecuaciones de movimiento están acopladas; sin embargo, es posible desacoplarlas por medio de una transformación ortogonal. En la primera aproximación obtenemos un conjunto de *modos normales*, en movimiento armónico simple. Esta teoría tiene amplia aplicabilidad en sistemas tales como: moléculas, cristales, sistemas acústicos, sistemas eléctricos, etc. Las lecturas recomendadas para ampliar este tema son: [1, 2, 12, 17, 19].

8.1. Modos normales de vibración

Consideremos un sistema mecánico con f grados de libertad representados por las coordenadas generalizadas $\{q_i\}$, que tienen las posiciones de equilibrio $\left\{q_i^0\right\}$, y que se encuentra en un estado cuya energía está muy cerca a un valor mínimo en la curva del potencial. Supongamos además que las restricciones del sistema son esclerónomas de tal forma que su energía cinética se escribe como una función cuadrática homogénea de

las velocidades (ver sección 5.8):

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{f} A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{8.1}$$

en el caso en el que las fuerzas generalizadas son derivables de una función potencial escalar

$$V(q) = V(q_1, q_2, ..., q_f), \tag{8.2}$$

la lagrangiana toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(q,q,t) = T(q,\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q_1, q_2, ..., q_f). \tag{8.3}$$

Si el sistema está muy cerca de su mínimo de energía potencial[1], suceden dos cosas: su energía cinética es pequeña (ver ecuación (2.55)) y los desplazamientos en torno a las posiciones de equilibrio también son pequeños. Cuando el sistema es perturbado ligeramente de su posición de equilibrio, un desarrollo en serie de Taylor nos permite escribir de manera aproximada a la energía potencial,

$$V(q) = V(q^0) + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{q_i^0}(q_i - q_i^0) + \sum_{i,j=1}^{f}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_i^0 q_j^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \cdots \tag{8.4}$$

Si el sistema está en equilibrio cerca de su mínimo de energía, debe cumplirse que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{q_i^0} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_i^0 q_j^0} > 0, \quad i,j = 1,2,...,f \tag{8.5}$$

[1] En este caso la energía potencial es función de f variables $q_1, q_{2,}...q_f$, y la curva de potencial es una superficie en el espacio de dimensión $f+1$.

i.e., en la posición de equilibrio la fuerza es nula y al salir ligeramente de ese equilibrio la fuerza es de restitución. El primer término del lado derecho en la ecuación (8.4) es una constante que puede ser suprimida modificando el origen de la energía, el segundo término es nulo por la condición de equilibrio. Si medimos los desplazamientos desde la posición de equilibrio,

$$Q_i = q_i - q_i^0, \tag{8.6}$$

y definimos a los coeficientes de restitución lineal como

$$k_{ij} = k_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_i^0 q_j^0} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i}\right)_{q_j^0 q_i^0}, \tag{8.7}$$

la lagrangiana del sistema queda como sigue:

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{f} A_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} k_{ij}Q_iQ_j. \tag{8.8}$$

Los coeficientes de inercia A_{ij} suelen ser dependientes de las variables del sistema pero deben ser simétricos $A_{ij} = A_{ji}$ (ver ecuaciones (5.89) y (5.90)), sin embargo en esta aproximación podemos considerarlos constantes y el valor que toman es aquél de la posición de equilibrio,

$$a_{ij} = A_{ij}\left(q^0\right) = ctes. \tag{8.9}$$

Finalmente, la lagrangiana del sistema se convierte en una función cuadrática homogénea tanto en las velocidades generalizadas como en las coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{f} a_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} k_{ij}Q_iQ_j, \tag{8.10}$$

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \frac{1}{2}k_{ij}Q_iQ_j. \tag{8.11}$$

En esta última ecuación estamos introduciendo la convención de suma: en cada término un índice repetido indica suma

sobre todos los valores posibles de ese índice. Las ecuación de Lagrange nos proporcionan las ecuaciones de movimiento para este sistema:

$$a_{ij}\ddot{Q}_j + k_{ij}Q_j = 0, \qquad i = 1, 2, ...f. \tag{8.12}$$

El conjunto de ecuaciones (8.12) corresponde a un conjunto de osciladores lineales acoplados. Escribiendo esta ecuación en notación matricial tendremos que:

$$\mathbb{A}\ddot{\mathbb{Q}} + \mathbb{V}\mathbb{Q} = 0 \tag{8.13}$$

$$\ddot{\mathbb{Q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbb{Q} = 0. \tag{8.14}$$

En esta notación la matriz $\mathbb{Q}$ es un vector columna y $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{V}$ es una matriz cuadrada de dimensión f,

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ . \\ . \\ . \\ Q_f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & . & . & . & \Omega_{1f} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & . & . & . & \Omega_{2f} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ \Omega_{f1} & \Omega_{f2} & \Omega_{f3} & . & . & . & \Omega_{ff} \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Las matrices $\mathbb{A}$ y $\mathbb{V}$ son matrices reales y simétricas, además $\mathbb{A}$ es una matriz no singular. Para desacoplar las ecuaciones (8.12) hacemos una transformación ortogonal por una matriz $\mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \omega^2 = \mathbb{C}\mathbf{\Omega}^2\mathbb{C}^{-1} \qquad & con \qquad \omega_{ij}^2 = \omega_i^2\delta_{ij} \\ \mathbb{C}\mathbb{C}^{-1} = \mathbb{C}^{-1}\mathbb{C} = \mathbb{I}\ , & \\ \mathbb{C}\widetilde{\mathbb{C}} = \widetilde{\mathbb{C}}\mathbb{C} = \mathbb{I}; \qquad & \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{-1}\ , \end{aligned} \tag{8.16}$$

$\mathbb{I}$ es la matriz unidad de dimensión f. La matriz ω^2 es una matriz diagonal. Con esta transformación el nuevo conjunto de

coordenadas queda como sigue:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{C}\mathbb{Q}, \tag{8.17}$$

i.e., las nuevas coordenadas Q' son combinaciones lineales de las originales Q,

$$Q'_j = c_{jk}Q_k = c_{j1}Q_1 + c_{j2}Q_2 + ... + c_{jf}Q_f. \tag{8.18}$$

Escogiendo apropiadamente la matriz $\mathbb{C}$, la matriz ω^2 resulta diagonal[2], la ecuación (8.14) se convierte en

$$\ddot{\mathbb{Q}}' + \omega^2\mathbb{Q}' = 0, \tag{8.19}$$

cada variable Q'_j tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{Q}'_j + \omega_j^2 Q'_j = 0, \qquad i = 1, 2, ..., f, \tag{8.20}$$

correspondiendo a un conjunto de osciladores desacoplados independientes, con soluciones inmediatas,

$$Q'_j = B_j \cos(\omega_j t + \beta_j). \tag{8.21}$$

Las frecuencias ω_j son las frecuencias propias también llamadas frecuencias naturales (eigen-frecuencias o eigenvalores) y las columnas de la matriz $\mathbb{C}$ son los vectores propios (eigenvectores) de la matriz $\mathbf{\Omega}^2$, a las soluciones Q'_j se les llama *modos normales* o modos normales de vibración. Conociendo las frecuencias ω_j y las combinaciones lineales (8.18) conocemos la solución a las ecuaciones originales (8.14), resolviendo de esta manera el movimiento del sistema.

Recordemos que ω^2 es una matriz diagonal, multipliquemos por la izquierda la primera de las ecuaciones (8.16) por la matriz por $\mathbb{C}$,

[2]Toda matriz real y simétrica no singular es diagonalizable y sus valores propios son reales. Esto asegura que existe la matriz $\mathbb{C}$ y es única [29, 32, 33].

$$\mathbf{\Omega}^2\widetilde{\mathbb{C}}=\widetilde{\mathbb{C}}\omega^2=\omega^2\widetilde{\mathbb{C}}, \tag{8.22}$$

la última igualdad se debe a que ω^2 es una matriz diagonal, podemos arreglar esta ecuación para obtener

$$(\mathbf{\Omega}^2-\omega^2\mathbb{I})\widetilde{\mathbb{C}}=0, \tag{8.23}$$

para que este conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas tenga solución diferente de la trivial es necesario que tenga determinante nulo:

$$\det(\mathbf{\Omega}^2-\omega^2\mathbb{I})=0. \tag{8.24}$$

Esta es la ecuación característica[3] para el sistema algebraico de ecuaciones, la solución equivale a calcular las f raíces de un polinomio de grado f en la incógnita ω^2; las raíces de esta ecuación característica proporciona las frecuencias de los modos normales. Sustituyendo éstas en la ecuación (8.23) podemos resolver para los coeficientes c_{ij} y con ellos obtenemos las coordenadas normales Q_i' que tienen solución armónica. Las coordenadas originales pueden ser obtenidas invirtiendo las ecuaciones (8.18).

8.2. Oscilaciones acopladas

En esta sección ejemplificamos el método descrito para calcular los modos normales de vibración y las frecuencias naturales en sistemas acoplados, en el caso en que es posible aproximarlos por oscilaciones pequeñas.

1. **Osciladores acoplados**

Consideremos un caso simple: dos partículas de masas iguales acopladas por tres resortes como se muestran en la figura (8.1.). La lagrangiana de este sistema de osciladores acoplados se escribe fácilmente:

[3]También se le llama ecuación secular.

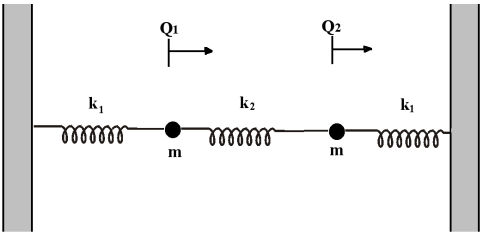

Figura 8.1. Dos partículas de masas idénticas están acopladas por tres resortes, los extremos están fijos a paredes inmóviles.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 - \frac{1}{2}k_1Q_1^2 - \frac{1}{2}k_1Q_2^2 - \frac{1}{2}k_2(Q_1 - Q_2)^2, \quad (8.25)$$

las ecuaciones de Lagrange nos llevan inmediatamente a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\ddot{Q}_1 + k_1Q_1 + k_2(Q_1 - Q_2) &= 0 \\ m\ddot{Q}_2 + k_1Q_2 + k_2(Q_2 - Q_1) &= 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Estas ecuaciones están acopladas; de la simple inspección de estas ecuaciones podemos proponer una forma para desacoplarlas, haciendo el siguiente cambio de variables:

$$Q_1' = Q_1 + Q_2 \quad (8.27)$$

$$Q_2' = Q_1 - Q_2, \quad (8.28)$$

estas coordenadas son respectivamente la del CM y la coordenada relativa. Sin embargo, para sistemas con más grados de libertad se requiere del uso del método general que estudiamos en la sección anterior. En el método general interesan las siguientes matrices:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

La matriz $\mathbb{A}$ es fácilmente invertible, el cálculo de la matriz de frecuencias es muy sencillo:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} \end{pmatrix}, \tag{8.30}$$

estas tres matrices son reales y simétricas. La ecuación característica se convierte en:

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} - \omega^2 & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.31}$$

El polinomio característico (8.24) para este caso resulta ser:

$$(\frac{k_1 + k_2}{m} - \omega^2)^2 - \left(\frac{k_2}{m}\right)^2 = 0. \tag{8.32}$$

Este polinomio de grado 2 tiene soluciones inmediatas:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m}. \tag{8.33}$$

Estas son las dos frecuencias naturales o las frecuencias de los modos normales; notemos que la solución se obtiene para ω^2, no para ω.

Para calcular los vectores propios, los modos normales (8.17), regresemos a la ecuación (8.23). Sustituimos la primera frecuencia normal $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$ obteniendo la siguiente matriz nula para el primer modo normal:

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} - \omega_1^2 & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} - \omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{8.34}$$

esta ecuación se reduce a

$$\begin{pmatrix} \frac{k_2}{m}c_{11} - \frac{k_2}{m}c_{21} \\ -\frac{k_2}{m}c_{11} + \frac{k_2}{m}c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.35}$$

cuya solución es

$$c_{11} = c_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{8.36}$$

esta última condición es para que los vectores propios estén normalizados $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$. Un proceso análogo para la segunda raíz, $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m}$, nos conduce a

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m} - \omega_2^2 & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_1+k_2}{m} - \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{8.37}$$

que se simplifica a

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_2}{m} c_{12} - \frac{k_2}{m} c_{22} \\ -\frac{k_2}{m} c_{12} - \frac{k_2}{m} c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.38}$$

obteniendo que

$$c_{12} = -c_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{8.39}$$

Entonces, la matriz de la transformación es

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{8.40}$$

Es muy fácil probar que

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^{-1} = \mathbb{C}\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{I} = \mathbb{C}^{-1}\mathbb{C} = \widetilde{\mathbb{C}}\mathbb{C}, \tag{8.41}$$

también es muy fácil probar que $\mathbb{C}$ diagonaliza a $\mathbf{\Omega}^2$.

$$\omega^2 = \mathbb{C}\mathbf{\Omega}^2\mathbb{C}^{-1}. \tag{8.42}$$

Las ecuaciones (8.18) para los modos normales se pueden escribir así:

$$Q_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2) = B_1 \cos(\sqrt{\frac{k_1}{m}}t + \beta_1), \tag{8.43}$$

$$Q_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2) = B_2 \cos(\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}t + \beta_1). \tag{8.44}$$

Las constantes B_1, B_2 y β_1, β_2 determinan la amplitud de cada modo normal y su fase temporal, sus valores específicos dependen de las condiciones iniciales del sistema de osciladores. Estos modos normales corresponden a la variable del CM que oscila con periodo $T_{CM} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ y a la coordenada relativa que oscila con periodo $T_r = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+2k_2}}$. El movimiento de este sistema es la superposición de estos dos modos normales.

2. **Péndulo doble**

Para el caso de pequeñas oscilaciones podemos ahora resolver el problema del péndulo doble. En la sección (5.5) la lagrangiana del péndulo doble está dada por la ecuación (5.49). Haciendo la aproximación de oscilaciones pequeñas, en la energía cinética aproximamos los coeficientes de inercia por su valor de equilibrio de acuerdo a la ecuación (8.9) y la energía potencial la desarrollamos de acuerdo con la ecuación (8.4), con esto obtenemos la lagrangiana del péndulo doble en la aproximación deseada,

$$\mathcal{L} = T = \frac{ML_1^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2L_2^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + m_2L_2L_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}MgL_1\theta_1^2 + \\ + \frac{1}{2}m_2gL_2\theta_2^2 - V_0, \tag{8.45}$$

$M = m_1 + m_2$ es la masa total y V_0 es una constante aditiva en el potencial. Con esta aproximación las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$ML_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_2L_1\ddot{\theta}_2 + MgL_1\theta_1 = 0 \tag{8.46}$$

$$m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1 + m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 + gm_2L_2\theta_2 = 0. \tag{8.47}$$

De esta forma las matrices de interés quedan así:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} ML_1^2 & m_2L_1L_2 \\ m_2L_1L_2 & m_2L_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} gML_1 & 0 \\ 0 & gm_2L_2 \end{pmatrix}, \tag{8.48}$$

la matriz inversa de los coeficientes de inercia resulta la siguiente

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1 L_1^2} & -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} \\ -\frac{1}{m_1 L_1 L_2} & \frac{M}{m_1 m_2 L_2^2} \end{pmatrix}. \tag{8.49}$$

De esta manera la matriz $\mathbf{\Omega}$ es:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \frac{gM}{m_1 L_1} & -\frac{gm_2}{m_1 L_1} \\ -\frac{gM}{m_1 L_2} & \frac{gM}{m_1 L_2} \end{pmatrix}. \tag{8.50}$$

La ecuación característica (8.24) se convierte en:

$$\begin{vmatrix} \frac{gM}{m_1 L_1} - \omega^2 & -\frac{gm_2}{m_1 L_1} \\ -\frac{gM}{m_1 L_2} & \frac{gM}{m_1 L_2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{8.51}$$

mientras que para el polinomio característico obtenemos:

$$(\frac{gM}{m_1 L_1} - \omega^2)(\frac{gM}{m_1 L_2} - \omega^2) - \frac{g^2 m_2 M}{m_1^2 L_1 L_2} = 0, \tag{8.52}$$

las raíces de esta ecuación son,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 L_1 L_2}[M(L_1 + L_2) \pm \\ \pm \sqrt{M^2(L_1 + L_2)^2 - 4M m_1 L_1 L_2}\,]. \tag{8.53}$$

Si el arreglo pendular es tal que $m_1 = m_2$, $L_1 = L_2$ (el péndulo doble simétrico) las frecuencias normales en este caso particular son:

$$m_1 = m_2\ ,\ L_1 = L_2 \quad \rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \left[2 \pm \sqrt{2}\right], \tag{8.54}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ es la frecuencia de cualquiera de los péndulos oscilando independientemente.

El cálculo de los modos normales para el péndulo doble simétrico sigue el mismo camino que el del ejemplo anterior, sustituyendo las frecuencias (8.54), en la ecuación (8.51) la ecuación (8.23) produce los siguientes vectores propios:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{8.55}$$

entonces, los modos normales del péndulo doble simétrico son:

$$Q_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2) = B_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})}t + \beta_1) \tag{8.56}$$

$$Q_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \theta_2) = B_2 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})}t + \beta_1). \tag{8.57}$$

Nuevamente, tienen el sentido de coordenada de centro de masa y relativa. Las constantes B_1, B_2 y β_1, β_2 dependen de las condiciones iniciales que se deben aplicar a las coordenadas originales, éstas resultan ser:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) = \sqrt{2}(B_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})}\ t + \beta_1) + \\ + B_2 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})}\ t + \beta_1)) \end{aligned} \tag{8.58}$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) = \sqrt{2}(B_2 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2-\sqrt{2})}\ t + \beta_1) - \\ - B_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})}\ t + \beta_1)), \end{aligned} \tag{8.59}$$

son combinaciones lineales de los modos normales; con esto, el movimiento del péndulo doble está completamente resuelto en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Otro caso particular del péndulo doble es aquél donde la masa superior es mucho más grande que la inferior, $m_1 >> m_2$, la solución (8.53) se reduce a

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{g}{2L_1L_2}\left[(L_1+L_2) \pm (L_1-L_2)\right] \\ \omega_1^2 &= \frac{g}{L_1} \qquad , \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{L_2}, \end{aligned} \tag{8.60}$$

los modos normales tienen las frecuencias que corresponderían a los dos péndulos simples desacoplados, recordemos que estas son las frecuencias de los modos normales y que las coordenadas originales son una combinación lineal de estos modos normales. El cálculo de vectores propios se deja como ejercicio al lector.

8.3. Método alternativo

Un método alternativo para el cálculo práctico de los modos normales es suponer una solución armónica para cada una de las variables del sistema representado por las ecuaciones (8.12), resolver la ecuación característica y escribir la solución general como una combinación de estas soluciones armónicas que tienen la frecuencia de los modos normales. Para ejemplificar este método consideremos al sistema descrito en la figura (8.2.), el bloque de masa M se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción sujeto a un resorte de constante de restitución k, la masa del péndulo que cuelga es m, la longitud del péndulo es ℓ y la masa de ésta la consideramos despreciable; el arreglo se encuentra en un campo gravitacional homogéneo de aceleración g.

La lagrangiana del sistema se puede encontrar fácilmente para los dos grados de libertad x, la posición horizontal del bloque medida desde su posición de equilibrio y θ el ángulo que hace la cuerda con la vertical; la posición del péndulo está dada por,

$$x_2 = x + \ell \ sen \ \theta, \quad y_2 = -\ell \cos\theta, \tag{8.61}$$

la lagrangiana en estos grados de libertad es

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{k}{2}x^2 + mgl\cos\theta, \tag{8.62}$$

las ecuaciones de Lagrange nos proporcionan las siguientes ecua-

ciones de movimiento:

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2 sen\ \theta + kx = 0 \qquad (8.63)$$

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + gsen\ \theta = 0. \qquad (8.64)$$

En el el régimen de oscilaciones pequeñas $x, \theta, \dot{x}$ y $\dot{\theta}$ son cantidades pequeñas, de tal forma que las ecuaciones se reducen a

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} + kx = 0$$

$$\ell\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\ \theta = 0. \qquad (8.65)$$

Suponiendo que las soluciones son armónicas proponemos que

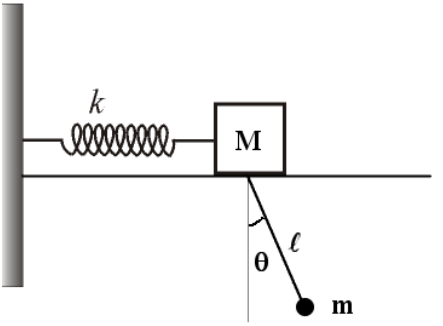

Figura 8.2. El bloque se desplaza en la dirección horizontal mientras que el péndulo sólo puede moverse en el plano vertical que contiene al eje x.

$$x = x_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{y} \qquad \theta = \theta_0 e^{-i\omega t}, \qquad (8.66)$$

las ecuaciones (8.65) se convierten en

$$-(M+m)x_0\omega^2 - m\ell\theta_0\omega^2 + kx_0 = 0 \tag{8.67}$$

$$-\ell\theta_0\omega^2 - x_0\omega^2 + g\ \theta_0 = 0. \tag{8.68}$$

La ecuación característica de este sistema algebraico de ecuaciones es

$$\det\begin{pmatrix} k-(M+m)\omega^2 & -m\ell\omega^2 \\ -\omega^2 & g-\ell\omega^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.69}$$

Las raíces de este polinomio resultan ser

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g(M+m)+k\ell}{2M\ell} \pm \frac{\sqrt{(g(M+m)+k\ell)^2 - 4Mgk\ell}}{2M\ell}. \tag{8.70}$$

Con estas soluciones podemos obtener las soluciones para las amplitudes x_0 y θ_0, sustituyendo las dos soluciones de la ecuación (8.70) en la ecuación (8.68) obtenemos dos posibles soluciones para x_0 y θ_0, de tal forma que la solución general es

$$x(t) = x_{01}sen(\omega_1 t) + x_{02}\cos(\omega_2 t) \tag{8.71}$$

$$\theta(t) = \theta_{01}sen(\omega_1 t) + \theta_{02}\cos(\omega_2 t). \tag{8.72}$$

Esta solución es completamente equivalente a la solución (8.17). Este método funciona bien para sistemas con pocos grados de libertad, sin embargo, para sistemas con varios grados de libertad establecer la aproximación armónica suele ser problemático

8.4. Ejercicios

1. Obtenga la función de Hamilton para la lagrangiana de la ecuación (8.10).

2. Para el ejemplo de tres partículas acopladas por resortes demuestre que la matriz (8.40) cumple con las ecuaciones (8.41) y (8.42).

3. Para el primer ejemplo en este capítulo, resuelva el problema desacoplando las ecuaciones de movimiento (8.26) con el cambio de variables $Q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2)$ y $Q'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$. Demuestre que las frecuencias naturales que se obtienen están dadas por las ecuaciones (8.33).

4. En el ejemplo del péndulo doble, demuestre que la matriz inversa es (8.49), demuestre que las frecuencias naturales están dadas por la ecuación (8.53).

5. Calcule los modos normales de oscilación para el péndulo doble asimétrico cuando $m_1 >> m_2$, interprete el movimiento.

6. Desde un techo firme cuelga un resorte de constante k_1 sujetando a una masa m_1, de ella cuelga un segundo resorte de constante k_2 sujetando a otra masa m_2, el movimiento tiene sólo componente vertical. Calcule las frecuencias naturales de oscilación y obtenga los modos normales de vibración.

7. Para el sistema descrito por la lagrangiana (8.62) y usando el método general obtenga las frecuencias naturales y los modos normales, demuestre que la solución es equivalente a la del método alternativo.

8. Tres partículas de masas iguales están conectadas por resortes idénticos, en su posición de equilibrio forman un triángulo equilátero. ¿Cuantos grados de libertad tiene

este sistema? Escriba la función de Lagrange para este caso. Escriba las ecuaciones de movimiento en la aproximación armónica para pequeñas oscilaciones. Obtenga las frecuencias naturales de vibración y sus modos normales.

9

TÓPICOS DE LA MECÁNICA HAMILTONIANA

En este capítulo presentamos un resumen de los principales resultados de la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica. Este resumen complementa la presentación de la mecánica clásica que hemos hecho hasta aquí. Presentamos el principio variacional o principio de Hamilton y mostramos que el principio de Hamilton es equivalente al principio de D'Alembert. Describimos el tratamiento para los sistemas no conservativos y no holonómicos en términos del principio variacional. Obtenemos las ecuaciones de Hamilton y las aplicamos a varios ejemplos. Desarrollamos los teoremas de conservación en el marco del formalismo hamiltoniano e introducimos, de forma resumida, la teoría de transformaciones canónicas: a partir de ellas introducimos los paréntesis de Lagrange y de Poisson. Escribimos las ecuaciones de movimiento en términos de los paréntesis de Poisson. Describimos brevemente la teoría de Hamilton-Jacobi e introducimos la descripción en términos de las variables de ángulo-acción para sistemas separables periódicos. Finalmente, ejemplificamos la generalidad de los principio variacionales mostrando que la ecuación de movimiento cuántica, la ecuación de Schrödinger, se obtiene de la aplicación del principio variacional a una forma apropiada de la acción. En el presente texto hemos omitido varias demostraciones y detalles, por falta de espacio y por estar más allá de nuestras intenciones; sin embargo, éstas pueden ser consultadas en las siguientes referencias: [12, 14, 16, 17, 19, 23, 26, 27, 28].

El formalismo hamiltoniano resulta de gran utilidad y generalidad debido a que el principio variacional es generalizable a

otros sistemas no mecánicos, entre ellos: la electrodinámica, la hidrodinámica, la termodinámica, la relatividad, la mecánica cuántica, etc. En el caso de la mecánica cuántica véase por ejemplo [28, 46], para la electrodinámica pueden consultarse los textos clásicos de [27, 28, 39], la teoría de la relatividad en [12, 23, 26, 28], algunos casos hidrodinámicos en [23, 28, 27], aspectos de la elasticidad en [23], etc. El desarrollo histórico de la mecánica analítica se puede consultar en la breve reseña histórica de la referencia [23] o en las referencias [53, 54]).

9.1. Principios variacionales de la mecánica

Principio de Hamilton

El principio de D'Alembert permite eliminar a las fuerzas de restricción de un problema mecánico, cuando las restricciones son holonómicas esto es posible gracias a la transformación entre coordenadas cartesianas y generalizadas. Escribiendo este principio en términos de las coordenadas generalizadas arribamos a las ecuaciones de movimiento de Lagrange, el cual es un principio diferencial. Hay también un principio integral llamado principio de Hamilton o simplemente principio variacional. Bajo condiciones generales es equivalente al principio de D'Alembert. Este principio también conduce a las ecuaciones de movimiento de Lagrange y tiene restricciones equivalentes a las del principio de D'Alembert. El principio, en su forma integral, resulta de mayor aplicabilidad en la física, pues en algunos casos no es posible definir los desplazamiento virtuales; en otros casos se puede definir la hamiltoniana pero no la fuerza o la aceleración instantánea. Para la mecánica clásica mostramos que las ecuaciones de movimiento de Lagrange son condición para la validez del principio de Hamilton[1], el cual puede establecerse de la siguiente forma:

[1]Para mayores detalles puede consultarse las refs. [12, 14, 23, 25, 26].

El movimiento del sistema mecánico entre los tiempos t_1 *y* t_2 *es tal que la integral de la lagrangiana*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt \tag{9.1}$$

es estacionaria con la condición de que la variación en los puntos extremos es nula $\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0$.

Equivalentemente, podemos escribir el principio de Hamilton como sigue:

$$\delta I = 0. \tag{9.2}$$

El símbolo δ significa variación (a primer orden) del argumento al que se aplica[2]. Por movimiento del sistema entenderemos la trayectoria del punto $P\left(q_1, q_2, ..., q_f\right)$ en el espacio de f dimensiones, llamado espacio de configuración $\{q\}$, donde el tiempo t es el parámetro libre. Es necesario imponer las condiciones a la frontera, que en este caso son:

$$\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0 \ \ , \ \ i = 1, 2, ..., f \ ; \tag{9.3}$$

esto significa que los puntos extremos son fijos o no tienen variación, $q_i\left(t_1\right) = q_i^0 = cte.$, $q_i\left(t_2\right) = q_i^f = cte$, i.e., la variación δ es independiente del tiempo.

Definiremos ahora lo que entenderemos por variación: consideremos un solo grado de libertad $f = 1$, el problema se reduce a calcular la trayectoria $q\left(t\right)$ que satisface a la ecuación (9.2). De todas las trayectorias en el espacio de configuración, existe una que satisface la ecuación (9.2); denotemos ésta por $q\left(t, 0\right)$ y a las demás, que difieren de ella, por $q\left(t, \alpha\right) = q\left(t, 0\right) + \alpha\eta\left(t\right)$, o bien que

[2]Algunos autores exigen la condición de extremal en lugar de estacionaria; sin embargo, para obtener las ecuaciones de Lagrange es suficiente con la condición de estacionaria o variación a primer orden, mientras que extremal exige que la variación a segundo orden tenga el mismo signo en todas las coordenadas. (Véase por ejemplo [23]).

$$\alpha\eta\left(t\right)=q\left(t,\alpha\right)-q\left(t,0\right) \tag{9.4}$$

es la diferencia entre la trayectoria que hace estacionaria a la integral en la ecuación (9.1) y cualquier variación de ésta. En términos del parámetro α, la variación en la ecuación (9.2) puede escribirse como sigue:

$$\delta I=\left(\frac{\partial I}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha \tag{9.5}$$

$$\text{si } \delta I=0m \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial I}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}=0, \tag{9.6}$$

con la condición a la frontera $\eta\left(t_1\right)=\eta\left(t_2\right)=0$, esto es, en los extremos de la integral la variación es nula, consistentemente con (9.3). Aplicando esta condición obtenemos la siguiente expresión[3]:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}dt=0 \tag{9.7}$$

la cual puede transformarse a

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}dt\delta\alpha+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\right)_{t_2}^{t_|}\delta\alpha=0;$$

la condición (9.4) nos permite calcular a

$$\left[\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right]_{t_1}^{t_2}=\left[\eta\left(t\right)\right]_{t_1}^{t_2}=\eta\left(t_2\right)-\eta\left(t_1\right)=0 \tag{9.8}$$

por la condición de frontera; más aún,

$$\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha=\delta q \tag{9.9}$$

[3]Sobre las propiedades de conmutatividad de la variación δ y la integración, véase por ejemplo las refs. [23, 26]. Para funciones continuas con derivadas continuas esta propiedad es siempre válida.

es cualquier variación de q alrededor del punto de estabilidad, por lo tanto la ecuación (9.7) se transforma en

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0, \tag{9.10}$$

esto es válido para cualquier variación δq. Para que la integral en la ecuación (9.10) sea nula, necesariamente debe satisfacerse que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \tag{9.11}$$

Este resultado puede extenderse a varias variables independientes $q_1, q_2, ..., q_f$, porque sus variaciones también lo son; entonces, para todos los grados de libertad se satisfacen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right)}{\partial q_i} = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., f. \tag{9.12}$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (9.12) con sus correspondientes condiciones a la frontera ($q_i(t = t_0)$ y $\dot{q}_i(t = t_0)$), proporcionan a $q_i\,(t)$, que satisfacen la condición (9.2). Una vez obtenida la solución $q_i(t)$, al sustituirla en la ecuación (9.1), se puede hacer la integración y esta función del tiempo tiene variación nula[4]. En resumen, hemos mostrado que las ecuaciones de movimiento de Lagrange se obtienen del principio de Hamilton, también es posible mostrar que el principio de Hamilton conduce a las ecuaciones de Lagrange[5].

[4]Detalles en este tema pueden consultarse en las referencias [12, 14, 19, 23, 26].

[5]Para esta demostración véase por ejemplo el capítulo IX en [14].

9.2. Equivalencia con el principio de D'Alembert

A la luz de este resultado observamos que los principios de D'Alembert y de Hamilton obligan a que se satisfagan las ecuaciones de movimiento de Lagrange; entonces, surgen las siguientes preguntas: ¿Es el principio de Hamilton la versión integral del principio de D'Alembert?, en cuyo caso ¿en el principio de Hamilton qué es un desplazamiento virtual?; también podríamos preguntarnos ¿cuál de los dos principios es más útil o más general?; en esta sección daremos respuesta a estas preguntas.

Consideremos el principio de D'Alembert,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right), \tag{9.13}$$

donde $\mathbf{F}_i$ son sólo las fuerzas aplicadas mientras que $\delta \mathbf{r}_i$ son los desplazamientos virtuales, nótese que las fuerzas de restricción ya han sido eliminadas. En el caso en que las fuerzas aplicadas sean derivables de una función potencial U[6], podemos relacionar a las fuerzas cartesianas con las fuerzas generalizadas por medio de la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j, \tag{9.14}$$

i.e., el trabajo virtual total de las fuerzas aplicadas es igual al trabajo virtual total de las fuerzas generalizadas. Nótese que la primera suma es sobre partículas y la segunda es sobre grados de libertad, Q_j es la fuerza generalizada asociada al potencial generalizado dependiente de la velocidad, definido por la siguiente

[6]Estamos incluyendo desde aquí a los potenciales generalizados. En la ref. [23] (pag. 111) se hace la demostración para potenciales independientes de la velocidad.

expresión:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \; ; \; U = U\left(q, \dot{q}; t\right), \tag{9.15}$$

de tal forma que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = -\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{f} (\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j})\delta q_j, \tag{9.16}$$

lo cual podemos reescribir como sigue,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = -\sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right) + \sum_{j=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \right) \tag{9.17}$$

$$= -\delta U + \sum_{j=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \right), \tag{9.18}$$

donde hemos sumado y restado la misma cantidad, además, hemos escrito que

$$\delta U = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j; \tag{9.19}$$

de acuerdo a la definición de la variación δ, independiente del tiempo.

Consideremos ahora la integral en el intervalo $(t_1 \; t_2)$ del trabajo virtual (ecuación (9.13)),

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt, \tag{9.20}$$

donde t_1 y t_2 son dos tiempos fijos. El segundo término del lado

derecho en la ecuación (9.20) lo podemos arreglar como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\mathbf{p}}_i\cdot\ \delta\mathbf{r}_i dt &= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} m_i\dot{\mathbf{v}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i dt \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\right)dt - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} m_i\mathbf{v}_i\cdot \\ &\quad \cdot\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_i dt \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i\right]_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} m_i\mathbf{v}_i\cdot\delta\mathbf{v}_i dt,\end{aligned} \tag{9.21}$$

en esta última expresión hemos usado la propiedad

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_i = \delta\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \delta\mathbf{v}_i\ , \tag{9.22}$$

resultando que:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\mathbf{p}}_i\cdot\ \delta\mathbf{r}_i dt = -\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\frac{m_i}{2}\delta\left(\mathbf{v}_i^2\right)dt + \sum_{j=1}^{f}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i\cdot \cdot\left[\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right]_{jt_1}^{t_2}, \tag{9.23}$$

el primer término del lado derecho es la variación la integral de la energía cinética; sustituyendo (9.18) y (9.23) en (9.13) tendremos que

$$\delta A = -\int_{t_1}^{t_2}\delta U dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta T\ dt - \left[\sum_{i,j}^{n,\,f} m_i\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q\right]_{jt_1}^{t_2} + + \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_j}\delta q\right]_{jt_1}^{t_2}, \tag{9.24}$$

si exigimos que los puntos extremos $q_i\,(t_1)$, $q_i\,(t_2)$ sean fijos; es decir, $\delta q_i\,(t_1) = \delta q_i\,(t_2) = 0$, los dos últimos términos de esta ecuación se anulan y tendremos que

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta W \;\; dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \delta I. \tag{9.25}$$

Este resultado dice que si postulamos el principio de D'Alembert, $\delta W = 0$ para todo tiempo en el intervalo $(t_1\ t_2)$ e imponemos la condición de frontera $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, tendremos entonces que se sigue el principio de Hamilton $\delta I = 0$ en el intervalo (t_1, t_2), aquí requerimos que las fuerzas sean derivables, a lo más, de un potencial generalizado. Podemos invertir el proceso y transformar δI para obtener la ecuación (9.20) de tal forma que el principio de Hamilton implicará al principio de D'Alembert. En resumen, el principio de Hamilton y el principio de D'Alembert son equivalentes bajo las siguientes condiciones: que las fuerzas sean derivables de un potencial y que las variaciones en los extremos sean nulas. En el caso en que ésto no se satisfaga, no es posible transformar el principio de D'Alembert en un principio variacional semejante al de la ecuación (9.13)[7].

En el caso de restricciones no holonómicas pero que acepten una forma diferencial lineal y fuerzas aplicadas derivables de una función potencial también es posible extender el principio mediante los multiplicadores de Lagrange, (véase la siguiente sección). Si las fuerzas no son derivables de una función potencial resultan las ecuaciones de Euler Lagrange para la energía cinética y fuerzas generalizadas **.** Es conveniente destacar que en el principio de D'Alembert la dinámica del sistema físico en cuestión está contenida en las fuerzas aplicadas mientras que en el principio de Hamilton está en los potenciales y recordemos también que los potenciales (o las lagrangianas) no están unívocamente definidos; sin embargo las ecuaciones de movi-

[7] C. Lanczos [23] afirma que para restricciones no holonómicas, en general, no es posible establecer esta equivalencia.

miento son únicas.

En la ecuación (9.23), δq_i es la variación de la coordenada q_i en cualquier punto de la trayectoria entre los tiempos t_1 y t_2, si comparamos esta relación con la ecuación (9.13), observamos que esta δq_i corresponde exactamente al desplazamiento virtual δq_i o equivalente $\delta \mathbf{r}_i$ de principio de D'Alembert.

Respecto a la utilidad de la formulación variacional: es conveniente señalar que una gran cantidad de ecuaciones que gobiernan el comportamiento de sistemas físicos, no necesariamente mecánicos, se pueden obtener mediante un principio variacional. El principio de Hamilton es aplicable a otros sistemas diferentes a los sistemas mecánicos; podemos aplicar el principio de Hamilton igualmente a una partícula cargada en un campo electromagnético (sistema electrodinámico) que a una partícula masiva sujeta a un resorte (sistema mecánico clásico), o a una porción de fluido no viscoso (sistema hidrodinámico), la única diferencia es la forma de la función lagrangiana (el comportamiento físico); claramente las *ecuaciones de movimiento* son diferentes pues las estructuras de las lagrangianas lo son.

Es oportuno aclarar que el principio de Hamilton o el de mínima acción (genéricamente llamados principios variacionales) no contienen en sí mismos el comportamiento físico de los sistemas a los que se aplica, dicho comportamiento está contenido en la forma explícita de la función lagrangiana o hamiltoniana, la cual no es resultado del principio variacional, es un dato en él. Esta función dinámica sólo es posible obtenerla mediante las correspondientes *leyes dinámicas generales y principios físicos fundamentales*[8]. Esta es la razón por la que a la función de Lagrange (Hamilton) se le llama la función dinámica fundamental.

Algunas veces se afirma que el formalismo hamiltoniano o el lagrangiano (los principios variacionales) son equivalentes a las leyes de Newton, en particular a la segunda ley; sin embargo,

[8]Como ejemplo de esta afirmación véase la deducción de la función lagrangiana para una partícula libre, mediante principios físicos fundamentales, que se hace en las referencias [16, 19].

esto no es así debido a que tanto el principio de D'Alembert como el de Hamilton son aplicables a sistemas con restricciones holonómicas y definidos por una función potencial (hay algunas excepciones, ver siguientes secciones). Esto hace que la segunda ley de Newton sea el principio más general para sistemas mecánicos. En *general*, la formulación de Hamilton o de Lagrange no son aplicables a sistemas disipativos o con restricciones no holonómicas.

Finalmente, debemos hacer notar que la formulación de Hamilton o la de Lagrange suelen proporcionar información importante sobre las fuerzas de restricción (permiten calcularlas) cuando los sistemas son holonómicos. En cambio, la descripción de Newton requiere como primer paso la eliminación de las fuerzas de restricción, por no ser conocidas *a priori;* después de conocer la solución al movimiento del sistema se pueden calcular las fuerzas de restricción.

9.3. Sistemas no conservativos y no holonómicos

Sistemas no conservativos

En el caso en que las fuerzas no sean derivables de una función potencial podemos escribir el principio de D'Alembert (9.13) con ayuda de (9.14) y (9.23) de la siguiente manera:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j}^{f} Q_j \delta q_j dt = 0, \tag{9.26}$$

donde impondremos la condición de frontera $\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0$; T es la energía cinética, y el trabajo virtual de las fuerzas generalizadas lo hemos escrito como sigue:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j}^{f} Q_j \delta q_j. \tag{9.27}$$

Con esto, obtendremos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T(q, q, \dot{t})dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W \; dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W)dt = 0, \qquad (9.28)$$

esta última expresión es la extensión del *principio de Hamilton para sistemas no conservativos*, cuando incluimos la condición a la frontera

$$\delta q_i \left(t_1\right) = \delta q_i \left(t_2\right) = 0 \; .$$

Debido a que la energía cinética es una función de coordenadas y velocidades generalizadas, podemos transformar el primer término de la ecuación (9.28) de la misma forma en que lo hicimos para $\mathcal{L}$ en la sección anterior, resultando:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\left(q, \dot{q}, \, t\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j}^{f} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt, \qquad (9.29)$$

combinando este último resultado con la ecuación (9.28) obtenemos que

$$\sum_{j}^{f} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0, \qquad (9.30)$$

debido a que las variaciones δq_j son independientes entre sí, cada sumando se anula por separado,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \; , \; j = 1, 2, ..., f \; . \qquad (9.31)$$

Estas son las ecuaciones de Lagrange para sistemas no conservativos, pero con restricciones holonómicas, lo cual se refleja en el hecho de que las coordenadas generalizadas q_i son independientes. La ecuación (9.30) es el principio de Hamilton para fuerzas no derivables de una función potencial, sistemas no conservativos.

Restricciones no holonómicas. Multiplicadores de Lagrange. Consideremos ahora a los sistemas con restricciones no holonómicas pero con restricciones que pueden escribirse de la siguiente forma diferencial [9]:

$$\sum_{m=1}^{f} a_{\ell m} dq_m + a_{\ell t} dt = 0 \ , \ \ell = 1, 2, ..., k \ ; \tag{9.32}$$

supondremos que hay k restricciones con esta forma diferencial. d significa diferenciación, si $a_{\ell t} = 0$ la restricción será esclerónoma de lo contrario será reónoma. Las condiciones (9.32) se pueden escribir también como relaciones entre las velocidades:

$$\sum_{m=1}^{f} a_{\ell m} \dot{q}_m + a_{\ell t} = 0 \ , \ \ell = 1, 2, ..., k \ . \tag{9.33}$$

El problema se plantea ahora de la siguiente manera: hacer estacionaria a

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt \tag{9.34}$$

con las condiciones (9.32) y satisfaciendo las condiciones a la frontera $\delta q_i \left(t_1\right) = \delta q_i \left(t_2\right) = 0$. Aquí no podemos usar la variación libre pues las q_i no son todas independientes, sólo $f - k$ de ellas lo son. Sin embargo, se puede usar el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange[10]. Consideremos las relaciones entre los desplazamientos virtuales δq_m ($\delta t = 0$ en (9.32) por ser desplazamientos virtuales).

$$\sum_{m=1}^{f} a_{\ell m} \delta q_m = 0 \ , \ \ell = 1, 2, ..., k \ ; \tag{9.35}$$

[9] Para mayores detalles puede consultarse las siguientes referencias: [12, 14, 17, 23].

[10] El método de los multiplicadores indeterminados para condiciones auxiliares holonómicas es debido a Lagrange [23]. La extensión del método de Lagrange para cierto tipo de sistemas no holonómicos es debida a Ferrers (citado por [14]).

si integramos y sumamos sobre todas las restricciones, obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=1}^{f} \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell m} \delta q_m = 0, \tag{9.36}$$

donde hemos puesto a ciertos factores indeterminados ε_ℓ llamados multiplicadores indeterminados de Lagrange; ahora consideremos la expresión:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=1}^{f} \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell m} \delta q_m dt = 0, \tag{9.37}$$

con las mismas condiciones a la frontera, *i.e.*, exigimos que la integral de la lagrangian sea estacionaria sujeta a la restricción dada por la ecuación (9.36). Esta última expresión la podemos transformar usando las propiedades de la variación δ descritas anteriormente, obteniendo que

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} - \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell m} \right) \delta q_m dt = 0. \tag{9.38}$$

Las coordenadas generalizadas q_m no son independientes, sólo $f - k$ de ellas lo son (porque hay k restricciones del tipo (9.32)); sin embargo, podemos seleccionar los k parámetros ε_ℓ de tal forma que anulen el integrando para las últimas k variables q_m; es decir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} - \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell m} = 0 \ , \ m = f - k + 1, ..., f \ ; \tag{9.39}$$

estas k condiciones fijan los valores de ε_ℓ y una vez determinados, el resto $f - k$ coordenadas q_m sí pueden ser reconocidas

como independientes, de tal forma que satisfacen las ecuaciones de :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} - \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell m} = 0 \ , \ m = 1, 2, ...f - k \ ; \qquad (9.40)$$

combinando las ecuaciones (9.39) y (9.40) tenemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell i} \ , \ i = 1, 2, ...f \ . \qquad (9.41)$$

En estas ecuaciones el número de variables involucradas es mayor: $f + k$; las f coordenadas generalizadas q_m y los k parámetros indeterminados ε_ℓ; sin embargo, tenemos $f+k$ ecuaciones diferenciales a resolver: las f ecuaciones de movimiento (9.41) y las k ecuaciones de restricción (9.33), y por lo tanto, el sistema de ecuaciones está completamente determinado.

Ahora interpretamos físicamente a los parámetros ε_ℓ; supongamos que suprimimos las restricciones (9.33) pero mantenemos el mismo movimiento del sistema con la ayuda de cierta fuerza generalizadas $Q_i^{'}$; las ecuaciones de movimiento que tendríamos son las siguientes:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{'} \ , \ i = 1, 2, ...f \quad , \qquad (9.42)$$

pero si el movimiento es el mismo, las condiciones iniciales $q(t = t_0)$, $\dot{q}.(t = t_0)$ también lo son; la función lagrangiana en (9.41) y en (9.42) es la misma, por lo tanto debe satisfacerse que:

$$Q_i^{'} = \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell a_{\ell i} \ . \qquad (9.43)$$

En otras palabras, estas $Q_i^{'}$ son las fuerzas que mantienen las restricciones impuestas al sistema, *i.e.*, son las fuerzas de restricción. De esta manera, a través de los multiplicadores indeterminados de Lagrange podemos conocer al movimiento del

sistema al mismo tiempo que las fuerzas de restricción, con la condición que las restricciones tengan la forma diferencial apropiada (9.33)[11].

Para algunos sistemas mecánicos con restricciones holonómicas resulta necesario o importante conocer las fuerzas de restricción; el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange puede emplearse también para conocer las fuerzas de restricción. Para este caso existen restricciones de la forma

$$f_\ell\left(q_1, q_2, ..., q_f, t\right) = 0\ ,\ \ell = 1, 2, ..., k\ , \tag{9.44}$$

que también pueden ser escritas en forma diferencial como sigue:

$$df_\ell = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial f_\ell}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt = 0, \tag{9.45}$$

o igualmente,

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial f_\ell}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_\ell}{\partial t} = 0,\ \ \ell = 1, 2, ..., k\ , \tag{9.46}$$

as cuales tienen la forma de las ecuaciones (9.32) o (9.33) cuando hacemos las identificaciones

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial q_i} = a_{\ell i}\ ,\ \frac{\partial f_\ell}{\partial t} = a_{\ell\, t}\ , \tag{9.47}$$

el método de los multiplicadores indeterminados de lagrange es aplicable nuevamente. La única diferencia con el caso de restricciones no holonómicas es que para restricciones holonómicas podemos escribir al principio de Hamilton modificando la variación de la cantidad:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L} + \sum_{\ell=1}^{k} \varepsilon_\ell\, f_\ell \right) dt = 0\ \ , \tag{9.48}$$

[11]Nótese que sumar o restar la condición de restricción en la ecuación (9.37) no modifica el argumento *i.e.*, ε_ℓ y $-\varepsilon_\ell$ cumplen la condición de restricción en el principio variaciona (l9.37).

esto fue posible gracias al hecho de que (9.45) es una diferencial exacta, mientras que (9.32) no lo es (si lo fuese sería integrable y por lo tanto restricción holonómica).

Resumiendo: El principio de Hamilton puede extenderse para sistemas no holonómicos cuyas restricciones se puedan escribir de forma diferencial lineal. El método de los multiplicadores de Lagrange permite conocer la fuerzas de restricción.

El péndulo simple

El caso del péndulo simple nos permite ilustrar el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange mediante un ejemplo sencillo. Consideremos la lagrangiana del péndulo simple sin tomar en cuenta la restricción

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta, \tag{9.49}$$

y la condición de restricción, que de acuerdo a la ecuación (9.32) se puede escribir así:

$$r = \ell = cte, \qquad dr = 0, \qquad a_r = 1, \tag{9.50}$$

sólo hay una restricción $k = 1$. Con las ecuaciones de movimiento (9.41), y las restricciones (9.44) obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta) &= \varepsilon_r a_r \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgrsen\theta &= 0 \\ r = \ell = cte\ . & \end{aligned} \tag{9.51}$$

Tenemos ahora tres ecuaciones con las tres incógnitas ε, r, θ. Sustituyendo la tercera en las otras dos obtenemos que

$$\begin{aligned} -m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta &= \varepsilon_r a_r \\ \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) + \frac{g}{\ell}sen\theta &= 0, \end{aligned} \tag{9.52}$$

la segunda de estas ecuaciones se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\dot{\theta}}\left(\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2) - \frac{d}{dt}(\frac{g}{\ell}\cos\theta)\right) = 0, \tag{9.53}$$

que se puede arreglar a

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta) = 0. \tag{9.54}$$

Ésta es una integral de movimiento, es proporcional a la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta; \tag{9.55}$$

sustituyendo $\dot{\theta}^2$ de esta última ecuación y el valor de a_r en la primera de las ecuaciones (9.52) obtenemos la fuerza de restricción (la tensión del péndulo),

$$\varepsilon_r = \frac{2E}{l} - 3mg\cos\theta = T. \tag{9.56}$$

Esta fuerza de restricción resulta ser la tensión en la cuerda que sostiene al péndulo, este resultado está de acuerdo con un análisis sobre las fuerzas que actúan en el péndulo, lo cual dejamos como ejercicio para el lector.

El método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange nos permitió calcular la fuerza, en este caso la tensión en la cuerda. Usamos la forma diferencial (9.50) de una restricción originalmente holonómica. A pesar de que este método resulta más complicado que el método newtoniano para calcular la fuerza de restricción del péndulo, en sistemas más complejos resulta ser más útil (ver ejercicio al final del capítulo).

9.4. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

Estudiaremos ahora la formulación alternativa propuesta por Hamilton, la formulación hamiltoniana de la mecánica también

llamada formulación canónica. En la descripción de los sistemas mecánicos que hemos hecho hasta aquí hemos considerado siempre a las variables $\dot{q}_i$ como dependientes de q_i, por medio de $\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i$, y de ahí que las ecuaciones de Lagrange hayan resultado ecuaciones diferenciales de segundo orden. Consideraremos ahora una descripción equivalente para sistemas mecánicos holonómicos y fuerzas derivables de una función potencial, para aquéllos donde la descripción lagrangiana es apropiada. Si consideramos ahora al conjunto $(2f)$ de variables $q_i,\ p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ como variables independientes, donde p_i es el momento generalizado o canónico asociado con la coordenada generalizada q_i, al espacio definido por las $2f$ variables $q_i,\ p_i$ se le llama espacio fase; es el espacio donde está definida la función de Hamilton, mientras que la función lagrangiana está definida en el espacio de configuración definido por las f variables q_i.

Debido a que la función $\mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right)$ involucra explícitamente a $\dot{q}$, es necesario transformar a una nueva función $H\left(q, p, t\right)$ dependiente de todas las coordenadas y momentos generalizados $q_i\ , p_i$; esta transformación es sugerida directamente por la forma del momento generalizado o canónico $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$; *i.e.*, por una transformada de Legendre entre p_i y $\dot{q}_i$ de la siguiente manera:

$$H\left(q, p, t\right) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right), \tag{9.57}$$

de tal forma que su diferencial se puede obtener fácilmente:

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt; \tag{9.58}$$

derivando la función H dada por la definición en la ecuación (9.57) obtenemos también que

$$dH = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^{f} p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \tag{9.59}$$

estas dos últimas expresiones deben ser idénticas para toda q_i y p_i (aquí estas variables son reconocidas como independientes). Recordando que las ecuaciones de Lagrange permiten definir a $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ u usando la ecuación 9.10, arribamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, & i &= 1, 2, ..., f \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, & i &= 1, 2, ..., f \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.60}$$

Estas ecuaciones son las *ecuaciones canónicas o ecuaciones de movimiento de Hamilton*[12]. En otras palabras: reconociendo a las variables $q_i,\ p_i$ para $i = 1, 2, ..., f$ como variables independientes, al tiempo como parámetro y definiendo a la función hamiltoniana H, obtenemos las ecuaciones de movimiento (9.60), las cuales son ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución $q_i = q_i(t)$ y $p_i = p_i(t)$ nos proporciona la solución al problema mecánico definido por su función dinámica $H(q, p, t)$. Es necesario recordar que estas ecuaciones de movimiento son una alternativa para la descripción de un tipo particular de sistemas mecánicos; a saber, aquéllos con restricciones holonómicas y fuerzas derivables de una función potencial, para las cuales se puede escribir una función Lagrangiana.

Aunque a primera vista parece que las ecuaciones (9.60) son más fáciles de resolver que las ecuaciones de Lagrange, en la práctica no es así, pues estas ecuaciones contienen simultáneamente a las variables independientes q_i y p_i; es decir, están acopladas y la forma de desacoplarlas es tomar la derivada con respecto del tiempo de las primeras f ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \ddot{q}_i = \frac{d}{dt}\dot{q}_i \tag{9.61}$$

[12]Una derivación de estas ecuaciones partiendo de las propiedades de la transformación de Legendre puede verse en el Cap.VI. de la referencia[23].

y relacionar a p_i con $\dot{q}_i$; el resultado necesariamente es una ecuación diferencial de segundo orden para cada grado de libertad q_i, equivalente a la ecuación de Lagrange. Sin embargo, la formulación canónica (hamiltoniana) es útil porque: a) Para variables ignorables su solución es inmediata. b) Permite formular a la mecánica clásica en términos diferentes a la formulación lagrangiana y de allí permite una comprensión mayor de la estructura formal de la mecánica clásica. Esta última aseveración la ampliaremos en el resto de este capítulo[13].

El campo central

Consideremos el problema del campo central discutido en el capítulo 6. Para el problema reducido al plano, las coordenadas relativas permiten escribir a la lagrangiana del sistema (6.17) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},t)=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\theta}^{2}\right)-V(r)\,. \tag{9.62}$$

De acuerdo con las ecuaciones de movimiento de Hamilton los momentos generalizados toman la siguiente forma:

$$p_r=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=\mu\dot{r}, \tag{9.63}$$

$$p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\mu r^{2}\dot{\theta}; \tag{9.64}$$

despejando a las velocidades $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ obtenemos

$$\dot{r}=\frac{p_r}{\mu} \tag{9.65}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{\mu r^{2}}; \tag{9.66}$$

eliminando a las velocidades, la función de Hamilton queda así:

[13]Para un desarrollo más detallado de este tema se pueden consultar las refs. [12, 14, 16, 17, 19, 23].

$$H\left(q,p,t\right)=\sum_{i=1}^{f}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}\left(q,\dot{q},t\right), \tag{9.67}$$

$$H\left(r,\theta,p_r,p_\theta,t\right)=p_r(\frac{p_r}{\mu})+p_\theta(\frac{p_\theta}{\mu r^2})-\frac{1}{2}\mu\left((\frac{p_r}{\mu})^2+ +r^2(\frac{p_\theta}{\mu r^2})^2\right)+V\left(r\right). \tag{9.68}$$

Después de realizar el álgebra, obtenemos que la hamiltoniana para el problema del campo central es:

$$H\left(r,\theta,p_r,p_\theta,t\right)=\frac{p_r^2}{2\mu}+\frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}+V(r). \tag{9.69}$$

Debido a que la energía cinética es cuadrática homogénea en las velocidades, a que las fuerzas son derivables de una función potencial sólo dependiente de las coordenadas y que la función hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, la hamiltoniana se conserva y es la energía mecánica. Las ecuaciones canónicas de movimiento resultan ser:

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial H}{\partial r}=-\dot{p}_r & \rightarrow & \frac{\partial V}{\partial r}-\frac{p_\theta^2}{\mu r^3}=-\dot{p}_r\\ \frac{\partial H}{\partial \theta}=-\dot{p}_\theta & \rightarrow & 0=-\dot{p}_\theta\\ \frac{\partial H}{\partial p_r}=\dot{r} & \rightarrow & \frac{p_r}{\mu}=\dot{r}\\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\dot{\theta} & \rightarrow & \frac{p_\theta}{\mu r^2}=\dot{\theta}.\end{array} \tag{9.70}$$

Estas ecuaciones son de primer orden pero están acopladas; para desacoplarlas derivamos las dos últimas y las sustituimos en las dos primeras, con lo que obtenemos:

$$\mu\ddot{r}=-\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{p_\theta^2}{\mu r^3} \tag{9.71}$$

$$\frac{d}{dt}(p_\theta)=\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta})=0. \tag{9.72}$$

Son las mismas ecuaciones de movimiento que obtuvimos con el método de Lagrange, ecuaciones (6.22) y (6.18). En la

ecuación (9.72) es explícito que la variable θ es ignorable, en estos casos es cuando el método de Hamilton resulta más conveniente.

9.5. Teoremas de conservación

En la formulación newtoniana tanto como en la formulación lagrangiana los teoremas generales de conservación están asociados a ciertas simetrías del espacio y del tiempo, que se reflejan en la dependencia explícita que tiene la función lagrangiana, en alguna coordenada o en el tiempo; estas leyes de conservación constituyen las primeras integrales necesarias para resolver analíticamente los problemas mecánicos. Estos teoremas de conservación también aparecen en la formulación hamiltoniana. Basta con darse cuenta que la dependencia de H en las coordenadas generalizadas q_i es la misma que la dependencia de $\mathcal{L}$, con lo que obtenemos que si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \ cte, \tag{9.73}$$

implica a su vez que

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{p}_i = 0 \qquad \Rightarrow \ \ p_i = \ cte. \tag{9.74}$$

Significa que para las ecuaciones de movimiento de Hamilton, se pueden obtener los mismos teoremas de conservación que para las ecuaciones de Lagrange. Si la variable q_i es ignorable o cíclica, se cumple que $\dot{p}_i = 0$ y por lo tanto $p_i = cte$. Los correspondientes teoremas de conservación para el momento lineal y para el momento angular son equivalentes en ambas formulaciones.

Para el caso de la energía (más generalmente de la función hamiltoniana), consideremos la evolución temporal de la función

de Hamilton:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial P_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}; \tag{9.75}$$

usando las ecuaciones canónicas de movimiento (9.60) esta última ecuación se transforma en

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}; \tag{9.76}$$

este resultado lo podemos interpretar de la siguiente manera: si la lagrangiana $\mathcal{L}$ no es una función explícita del tiempo, la fución hamiltoniana H tampoco lo es, implicando que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$; por lo tanto, la función H es una integral de movimiento. En otras palabras, $H = cte$ si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo (invariancia ante traslaciones temporales) y de aquí el teorema de conservación de la energía como caso particular:

1) Si $\mathcal{L} = T - V$, i.e., las fuerzas generalizadas son derivables de una función potencial dependiente sólo de las coordenadas generalizadas, $(Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i})$.

2) Si $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q)$ las restricciones, siendo holonómicas, son también esclerónomas (no involucran explícitamente al tiempo) entonces, $\sum p_i \dot{q}_{\cdot i} = 2T$, por lo tanto

$$H = T + V = E \tag{9.77}$$

es la energía mecánica total(ver capítulo 5).

De estos teoremas de conservación se desprende claramente la utilidad de la formulación canónica. Es decir, cuando existen coordenadas ignorables $\dot{p}_{\cdot i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ y $p_i = cte = \alpha$ y en este caso $\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \dot{q}_i$ es fácilmente integrable.

Método de Routh. Basado en las propiedades de las coordenadas ignorables en la hamiltoniana, Routh[14] diseñó un método

[14]Ver por ejemplo [12, 14, 17].

híbrido entre el método de Hamilton y el método de Lagrange, en el cual la descripción es lagrangiana para coordenadas no cíclicas y hamiltoniana para coordenadas cíclicas. El método consiste en la construcción de una nueva función llamada la función de Routh: supongamos que las coordenadas $q_1, q_2, ..., q_m$ son ignorables, y que las últimas $f - m$ coordenadas $q_{f-m+1}, ..., q_f$ no son ignorables; entonces definimos a

$$R = \sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}; \tag{9.78}$$

esta función tiene la siguiente forma:

$$R = R\left(q_{m+1}, ..., q_f, \;\; p_1, p_2, ..., p_m, \dot{q}_{m+1}, ..., \dot{q}_f; \, t\right). \tag{9.79}$$

Las primeras m ecuaciones de movimiento son del tipo de Hamilton mientras que las $f - m$ restantes son del tipo lagrangiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \;\; \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0; \qquad & i = 1, 2, ..., m \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \; ; \qquad & i = m+1, ..., f \; . \end{aligned} \tag{9.80}$$

Las primeras m ecuaciones para $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ tienen solución inmediata, la función R se llama la routhiana o función de Routh [15].

9.6. Ecuaciones de Hamilton y el principio variacional

Como mencionamos anteriormente, resulta útil poder obtener las ecuaciones de Lagrange de un principio variacional, por su aplicabilidad a otros sistemas no mecánicos; en el caso de las

ecuaciones canónicas también resulta útil poder escribir un principio variacional. Escribamos el principio de Hamilton para la lagrangiana,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt = 0,$$

$$\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0\ ,\ i = 1, 2, ..., f\ \ , \tag{9.81}$$

y escribamos su relación con la función hamiltoniana,

$$\mathcal{L}\left(q, \dot{q}_i; t\right) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H\left(q, p, t\right), \tag{9.82}$$

de tal forma que en términos de H el principio de Hamilton se escribe así:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H\left(q, p\,, t\right) \right) dt = 0, \tag{9.83}$$

que se puede arreglar como

$$\delta \sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H\ \ dt = 0; \tag{9.84}$$

esta expresión se conoce con el nombre de principio de Hamilton modificado[15]. El hecho de escribir el principio de Hamilton de esta manera causa un cambio cualitativo importante; es decir, la variación δ no involucra al tiempo y los puntos extremos son fijos, pero además el argumento de la integral involucra a las variables independientes q_i y p_i, mientras que el principio de Hamilton sólo involucra variaciones de q_i; decimos entonces que

[15]Nuevamente se trata aquí de un principio estacionario y no extremal; es decir, la variación a primer orden es nula (ver por ejemplo la referencia [23]).

la variación de la integral, cuando se varía la *trayectoria en el espacio fase,* es nula.

Nuevamente la variación a primer orden puede hacerse en términos de un parámetro α, de la siguiente manera:

$$\delta = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \delta\alpha$$

con las condiciones

$$\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = \delta p_i\left(t_1\right) = \delta p_i\left(t_2\right) = 0\ . \tag{9.85}$$

Esto nos conduce inmediatamente a que

$$\delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} dt = 0, \tag{9.86}$$

en esta expresión p_i y q_i son las variables independientes y reconocemos que $\delta p_i = \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \delta\alpha$, $\delta q_i = \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \delta\alpha$. El segundo término necesita integrarse por partes, realizando esta integración obtenemos que :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} p_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i\right)_{\alpha=0} dt = \\ &= \left[p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} dt, \end{aligned} \tag{9.87}$$

el primer término del lado derecho en esta relación es nulo por la condición en los puntos extremos (9.85), de tal forma que la ecuación (9.86) se transforma a

$$\sum_{i=1}^{f} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \delta q_i \right\} dt = 0, \tag{9.88}$$

debido a que q_i y p_i son todas independientes; para que la ecuación (9.88) se satisfaga idénticamente es necesario que

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \ , \ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \ , \ i = 1, 2, ..., f \ . \tag{9.89}$$

Es decir: el principio modificado de Hamilton conduce a las ecuaciones canónicas o ecuaciones de movimiento de Hamilton.

9.7. Principio de mínima acción

En la mecánica existe otro principio variacional más restrictivo que el de Hamilton, el cual podemos establecer de la siguiente manera: *si*

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i dt \tag{9.90}$$

y la función H es constante de movimiento, entonces

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{f} p_i \ d\dot{q}_i = 0 \ ; \tag{9.91}$$

este principio es conocido como el principio de mínima acción y la cantidad A definida por la ecuación (9.90) se le llama *acción*[16]. La variación Δ es diferente a la variación δ de las secciones anteriores, la variación Δ (a primer orden nuevamente) involucra en esta ocasión a la variación del tiempo, incluyendo los puntos extremos t_1 y t_2; es decir, Δq_i ya no corresponde al desplazamiento virtual δq_i y más aún, $\Delta q_i \left(t_1\right) \neq 0$. Para este caso definimos a la variación

[16]No todos los autores coinciden en la nomenclatura respecto de la acción, algunos llaman acción a $\int L dt$; al mismo tiempo, no todos establecen el principio de mínima acción de la misma forma, véase por ejemplo [14, 19, 23].

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t; \tag{9.92}$$

en general, podemos definir la variación Δ de una función $u(q,t)$ como sigue:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial u}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \Delta u\,(q,t) \tag{9.93}$$

o equivalentemente[17]

$$\Delta u = \delta u + \dot{u} \Delta t = \sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \left(\sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Delta t\ . \tag{9.94}$$

Algunos casos particulares del principio de mínima acción pueden establecerse de la siguiente manera:

1) Si $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\,(q)$, i.e. las restricciones son holonómicas y esclerónomas, entonces

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i = 2T \qquad ; \qquad \Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0\ . \tag{9.95}$$

Si no hay fuerzas aplicadas sobre el sistema $T = cte$ entonces:

1a) $\Delta t = \Delta(t_2 - t_1) = 0$, ($t$ es tiempo y T es energía cinética), el tiempo de tránsito del sistema es extremal.
1b) Para el caso de una partícula $T = \frac{m}{2} \frac{ds^2}{dt^2}$; $dt = \sqrt{\frac{m}{2T}} ds$ y entonces

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2m\,(H - V)} ds = 0\ , \tag{9.96}$$

ds es el elemento de arco de la trayectoria en el espacio de configuración.

[17] Nótese que la variación Δ y la diferenciación con respecto del tiempo ya no pueden ser intercambiadas.

2) En el caso caso que T sea homogénea de grado dos,

$$T = \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \ , \tag{9.97}$$

$$T = \sum a_{ij} \frac{dq_i dq_j}{dt\, dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 , \tag{9.98}$$

$$d\rho = \sqrt{T} dt \tag{9.99}$$

$$d\rho \equiv \sqrt{\sum_{ij} a_{i\,,j} dq_i dq_j}, \tag{9.100}$$

y el principio de mínima acción se escribe como sigue:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{H - V\,(q)} d\rho = 0 \tag{9.101}$$

(forma de Jacobi para el principio de mínima acción).

9.8. Transformaciones canónicas

En la formulación lagrangiana el conjunto $\{q_i\}$ de coordenadas generalizadas no es único, la única condición impuesta al conjunto es la independencia entre las coordenadas. Supongamos que existe otro conjunto $\{Q_i\}$ de coordenadas generalizadas, también independientes (y por supuesto del mismo número de variables) en el cual podemos formular el mismo problema mecánico. Por ejemplo, para un sistema mecánico en tres dimensiones es igualmente válido el conjunto de coordenadas cartesianas que el de coordenadas esféricas; si el problema tiene simetría esférica, su solución será más simple en el de coordenadas esféricas. El problema del campo central ilustra muy bien esta propiedad: en coordenadas cartesianas esas ecuaciones de movimiento no

son fácilmente integrables, en cambio en coordenadas polares la solución es más fácil.

Si ambos conjuntos de coordenadas describen igualmente bien al sistema, podemos pensar en la transformación entre ellos, es decir:

$$Q_i = Q_i\left(q_j\,,\,t\right)\ , \tag{9.102}$$

tales transformaciones se denominan transformaciones de punto. En el caso de la formulación hamiltoniana no sólo son necesarias las coordenadas, sino también los momentos generalizados; si el conjunto de coordenadas no es único, el de coordenadas y momentos tampoco lo es. Podemos proponer la transformación entre ellos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i\left(q_j\,,p_j\,,\,t\right) \\ P_j &= P_j\left(q_i\,,p_i\,,\,t\right), \end{aligned} \tag{9.103}$$

el conjunto $\{q_j\,,p_j\}$ es un conjunto canónico por cumplir las ecuaciones canónicas o de Hamilton. Dentro de la mecánica hamiltoniana el conjunto $\{Q,P\}$ debe ser un conjunto de variables canónicas conjugadas; esto quiere decir que de todas las transformaciones de la forma (9.103), sólo son de utilidad en la formulación hamiltoniana aquéllas que satisfagan las ecuaciones canónicas; en otras palabras, que

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}\ ,\ i = 1,2,...,f \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}\ ;\ i = 1,2,...,f\ . \end{aligned} \tag{9.104}$$

La nueva función hamiltoniana $\mathcal{H}$ está escrita en el conjunto de variables $\{Q,P\}$. A las transformaciones definidas por las ecuaciones (9.103), que satisfacen la condición expresada en la ecuación (9.104), se les llama transformaciones canónicas. Si la transformación es canónica, en ambos sistemas de variables generalizadas debe satisfacerse el principio de Hamilton modifi-

cado:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H\left(q, p\,; t\right) \right) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}\left(Q, P\,; t\right) \right) dt = 0, \tag{9.105}$$

estas relaciones no implican que los integrandos sean iguales; difieren, a lo más, por la derivada total respecto del tiempo de una función arbitraria, en este caso de coordenadas y momentos[18], lo cual podemos escribir como sigue:

$$\sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}\left(Q, P\,, t\right) + \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H\left(q, p\,, t\right) \ ; \tag{9.106}$$

para que la igualdad se satisfaga, $\mathcal{S}$ debiera tener por argumentos a todas las variables q, p, Q, P, y el tiempo; sin embargo, las $2f$ relaciones (9.103) permiten eliminar a $2f$ de éstas y la función $\mathcal{S}$ puede tomar la forma siguiente:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}\left(q, Q, t\right); \tag{9.107}$$

la función $\mathcal{S}$ debe tener por argumentos a f de las antiguas variables y f de las nuevas, además del tiempo [19]. A la función $\mathcal{S}$ se le llama función generadora de la transformación canónica (FG).

Calculemos la derivada total respecto del tiempo de esta función

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sum_{i}^{f} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i}^{f} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial\, t}, \tag{9.108}$$

[18] Véase la sección sobre la unicidad de la función lagrangiana en el capítulo 5.

[19] Debemos tener en mente que dentro del marco de la mecánica clásica y de acuerdo al principio de relatividad de Galileo, el tiempo es un parámetro con carácter de universal; es decir, el mismo para cualquier sistema de observación o de coordenadas.

sustituyendo (9.108) en (9.106) e igualando los coeficientes de $\dot{q}_i$ y $\dot{Q}_i$ (ya que son independientes para este tipo de función generadora), tendremos que deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \quad , \; i = 1, 2, ..., f \\ P_i &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_i} \; , \; i = 1, 2, ..., f \\ \mathcal{H} &= H + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{9.109}$$

la invariancia canónica está garantizada por el principio de Hamilton. Una vez que se conoce a la función $\mathcal{S}$, las relaciones (9.109) proporcionan la transformación canónica, pues $P_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q_i}$, $i = 1, 2, ...f$ y la relación $p_i = p_i\,(q, Q, t)$ puede invertirse para obtener $Q_i = Q_i\,(q_j, p_j, t,)$, completando así la transformación.

La transformación canónica está determinada por la función generadora, debemos puntualizar que la transformación canónica está definida por el hamiltoniano del sistema, *i.e.*, por la dinámica del sistema mecánico al que está asociada dicha transformación, ver la tercera de las ecuaciones (9.109).

Es posible también obtener funciones generadoras que dependan de otros argumentos mediante transformaciones de Le-

gendre de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1\left(q,Q,t\right) &= \mathcal{S}\left(q,Q\ ,t\right)\\
\mathcal{S}_2\left(q,P,t\right) &= \mathcal{S}\left(q,Q,t\right)+\sum_{i=1}^{f}P_iQ_i\\
\mathcal{S}_3\left(p,Q\ ,t\right) &= \mathcal{S}\left(q,Q,t\right)-\sum_{i=1}^{f}p_iq_i\\
\mathcal{S}_4\left(p,P,\ t\right) &= \mathcal{S}\left(q,Q,t\right)+\sum_{i=1}^{f}P_iQ_i-\sum_{i=1}^{f}p_iq_i;
\end{aligned} \tag{9.110}$$

el resultado de estas transformaciones se muestra en la tabla 9.1

TABLA 9.1

$\mathcal{S}_1\left(q,Q,t\right)$	$\mathcal{S}_2\left(q,P,t\right)$	$\mathcal{S}_3\left(p,Q,t\right)$	$\mathcal{S}_4\left(p,P,\ t\right)$
$p_i=\frac{\partial\mathcal{S}_1}{\partial q_i}$	$p_i=\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial q_i}$	$q_i=-\frac{\partial\mathcal{S}_3}{\partial p_i}$	$q_i=-\frac{\partial\mathcal{S}_4}{\partial p_i}$
$P_i=-\frac{\partial\mathcal{S}_1}{\partial Q_i}$	$Q_i=\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial P_i}$	$P_i=-\frac{\partial\mathcal{S}_3}{\partial Q_i}$	$Q_i=\frac{\partial\mathcal{S}_4}{\partial P_i}$
$\mathcal{H}=H+\frac{\partial\mathcal{S}_1}{\partial t}$	$\mathcal{H}=H+\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial t}$	$\mathcal{H}=H+\frac{\partial\mathcal{S}_3}{\partial t}$	$\mathcal{H}=H+\frac{\partial\mathcal{S}_4}{\partial t}$

Ejemplos de transformaciones canónicas

Como ejemplos de transformaciones canónicas consideremos las siguientes funciones generadoras[20]:

i) Para una frunción generadora de la forma $\mathcal{S}_2$ consideremos a

$$\mathcal{S}_2\left(q,P,t\right)=\sum_{i=1}^{f}q_iP_i, \tag{9.111}$$

[20]Ver por ejemplo [12, 16, 17].

de acuerdo a las relaciones de la tabla 9.1 tendremos que

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial q_i} = P_i \ , \ Q_i = \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial P_i} = q_i \ , \ \mathcal{H} = H; \qquad (9.112)$$

claramente esta transformación no ha cambiado ni coordenadas ni momentos y se le llama transformación identidad[21].

ii) Una forma equivalente de una función generadora que hace la transformación identidad es

$$\mathcal{S}_3 \left(q, P, t \right) = \sum_{k=1}^{f} p_k Q_k,$$

que produce la siguiente transformación canónica

$$q_i = -\frac{\partial s_3}{\partial p_i} = -Q_i \ \ , \ \ P_i = -\frac{\partial s_3}{\partial Q_i} = -p_i,$$

claramente las ecuaciones de movimiento son las mismas, el signo menos que aparece es intrascendente dinámicamente.

iii) Definamos a la transformación canónica por la función generadora

$$\mathcal{S}_2 \left(q, P, t \right) = \sum_{i=1}^{f} f_i \left(q, t \right) P_i, \qquad (9.113)$$

en este caso tendremos que

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial P_i} = f_i \left(q, t \right), \qquad (9.114)$$

las nuevas coordenadas Q_i dependen solamente de las coordenadas originales; a estas transformaciones se les llama

[21] Si definimos al producto de transformaciones canónicas como la aplicación sucesiva de ellas, se puede mostrar que éstas forman un grupo, ver por ejemplo el capítulo 4 en la referencia [16].

transformaciones de punto o transformaciones de contacto. Todas las transformaciones de punto son canónicas. Un caso especial de éstas son las transformaciones ortogonales, aquéllas en que

$$f_i(q,t) = \sum_{k=1}^{f} a_{ik} q_k, \tag{9.115}$$

con a_{ik} satisfaciendo las condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{k=1}^{f} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \tag{9.116}$$

en este caso tanto las Q_i como las P_i se comportan también ortogonalmente. Esta transformación es de gran utilidad en el caso de las rotaciones en cualquier espacio de configuración ortogonal[22], el nuevo conjunto de coordenadas es también ortogonal.

iv) Una transformación equivalente pero para transformar los momentos generalizados es de la forma S_3,

$$\mathcal{S}_3\left(p, Q, t\right) = \sum_{i=1}^{f} f_i\left(p, t\right) Q_i$$

produciendo la transformación canónica

$$P_i = -\frac{\partial s_3}{\partial Q_i} = -f_i\left(p, t\right) \ ,$$

esta es una transformación semejante a una transformación de contacto pero en el espacio momental.

[22]Recordemos que el espacio de configuración está definido por las coordenadas $\{q_k\}$ donde además de ser independientes son ortogonales de acuerdo a la ecuación (9.116).

v) Otra transformación interesante correspondiente a la función generadora del tipo S_1 es

$$\mathcal{S}_1\left(q, Q\,;\, t\right) = \sum_{k=1}^{f} q_k Q_k, \tag{9.117}$$

pues

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_i} = Q_i \quad , \qquad P_i = -\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial Q_i} = -q_i; \tag{9.118}$$

es decir, el carácter de momento y coordenada generalizadas es intercambiable, este hecho puede observarse en la forma que tienen las ecuaciones canónicas (9.60); si intercambiamos $p_i \rightarrow Q_i$ y $q_i \rightarrow -P_i$, las ecuaciones de movimiento son las mismas.

vi) Una transformación equivalente a la anterior es de la forma S_4

$$\mathcal{S}_4\left(p, P\,;\, t\right) = \sum_{k=1}^{f} p_k P_k,$$

que produce la transformación de intercambio

$$q_i = -\frac{\partial \mathcal{S}_4}{\partial p_i} = -P_i \quad , \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{S}_4}{\partial P_i} = p_i;$$

la función de Hamilton se transforma a

$$H\left(q, p\,, t\right) = \mathcal{H}\left(-P, Q\,, t\right),$$

y las ecuaciones de movimiento son las mismas.

vii) Otro ejemplo de transformaciones canónicas que conduce a la solución inmediata de un problema mecánico es la

siguiente: consideremos un solo grado de libertad y la FG de la forma

$$\mathcal{S}_1 = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q \; ; \; f = 1 \quad , \tag{9.119}$$

resultando que

$$p = m\omega q \cot Q \qquad \text{y} \qquad P = \left(\frac{m\omega q^2}{2}\right) \frac{1}{sen^2 Q}. \tag{9.120}$$

despejando a q y p, la transformación canónica la podemos escribir de la siguiente forma,

$$q = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{P}{\omega}} sen\, Q \qquad \text{y} \qquad p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q; \tag{9.121}$$

esta transformación está asociada al oscilador armónico[23]

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \; , \; \omega = \sqrt{k/m}; \tag{9.122}$$

con esta transformación tendríamos que

$$\mathcal{H} = H = \omega P \tag{9.123}$$

y las ecuaciones de movimiento

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \; , \; \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega, \tag{9.124}$$

o bien $P = cte$ y $Q = \omega t + \alpha$, resolviendo trivialmente el problema del oscilado armónico. La hamiltoniana H es la energía mecánica total, mientras que

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} sen\,(\omega t + \alpha) \tag{9.125}$$

[23]Más adelante en este capítulo mostraremos cómo obtener la función generadora que resuelve trivialmente un sistema mecánico usando el método de Hamilton y Jacobi, ver sección 9.10.

es la solución del oscilador armónico con las condiciones iniciales apropiadas para E y α (la energía y la fase temporal). Con este ejemplo observamos que una transformación canónica puede usarse para resolver un problema específico, o bien que hemos encontrado un sistema de coordenadas $\{Q, P\}$ en el cual las ecuaciones de movimiento toman su forma más simple; esta idea condujo al método de Hamilton-Jacobi (ver más adelante este tratamiento).

9.9. Paréntesis de Lagrange y de Poisson

En el formalismo hamiltoniano surgen ciertas cantidades de gran interés y utilidad, entre ellas se encuentran las llamadas integrales invariantes de Poincaré[24]. Consideremos uno de los más importantes resultados de H. Poincaré, las llamadas integrales invariantes, que establecen que: si dos conjuntos de coordenadas (q_i, p_i) y (Q_i, P_i) son canónicos y las funciones dinámicas u_1 y u_2 definen una superficie bidimensional en el espacio fase de dimensión $2f$, entonces las siguientes integrales son invariantes ante una transformación canónica,

$$\begin{aligned}\sum_i \int\int_S dq_i dp_i &= \int\int_S \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u_1, u_2)} du_1\, du_2 = \\ &= \int\int_S \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u_1, u_2)} du_1\, du_2 = \\ &= \sum_i \int\int_S dQ_i dP_i, \end{aligned} \tag{9.126}$$

[24]Las demostraciones omitidas pueden consultarse en las referencias [12, 14, 16, 19].

donde ambos conjuntos de coordenadas están conectados por una transformación canónica[25]. El símbolo $\frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u_1,u_2)}$ denota al jacobiano de las variables indicadas en él. Claramente los integrandos son iguales, es decir:

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u_1}\frac{\partial p_i}{\partial u_2}-\frac{\partial q_i}{\partial u_2}\frac{\partial p_i}{\partial u_1}\right)=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial u_1}\frac{\partial P_i}{\partial u_2}-\frac{\partial Q_i}{\partial u_2}\frac{\partial P_i}{\partial u_1}\right), \tag{9.127}$$

a estas expresiones se les denota por los siguientes corchetes o paréntesis:

$$\begin{aligned}\{u_1,u_2\}_{q,p} &= \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u_1}\frac{\partial p_i}{\partial u_2}-\frac{\partial q_i}{\partial u_2}\frac{\partial p_i}{\partial u_1}\right)\\ \{u_1,u_2\}_{Q,P} &= \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial u_1}\frac{\partial P_i}{\partial u_2}-\frac{\partial Q_i}{\partial u_2}\frac{\partial \underline{P}_i}{\partial u_1}\right)\\ \{u_1,u_2\}_{q,p} &= \{u_1,u_2\}_{Q,P}\end{aligned} \tag{9.128}$$

y se les conoce con el nombre de paréntesis de Lagrange, la tercera de las igualdades de la ecuación (9.128) implica que los paréntesis de Lagrange son invariantes canónicos, toman el mismo valor en ambos conjuntos de coordenadas. Estos paréntesis tienen las siguientes propiedades:

[25]No debemos perder de vista el hecho de que una transformación canónica está definida por las hamiltonianas, en los que las nuevas y antiguas coordenadas son canónicas.

$$\begin{aligned}
&\{u_1, u_2\} = -\{u_2, u_1\} \\
&\{u_i, u_i\} = 0 \\
&\{q_k, q_\ell\} = 0 \\
&\{q_k, p_\ell\} = \delta_{k\ell} \\
&\{p_k, p_\ell\} = 0 \\
&\{Q_k, Q_\ell\} = 0 \\
&\{P_k, P_\ell\} = 0 \\
&\{Q_k, P_\ell\} = \delta_{k\ell} \quad ,
\end{aligned} \tag{9.129}$$

las tres últimas relaciones se conocen con el nombre de paréntesis de Lagrange fundamentales.

De mayor importancia y utilidad son los llamados paréntesis de Poisson, definidos de la siguiente forma:

$$[u_1, u_2]_{q,p} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_i} \frac{\partial u_2}{\partial p_i} - \frac{\partial u_1}{\partial p_i} \frac{\partial u_2}{\partial q_i} \right), \tag{9.130}$$

estos paréntesis también son invariantes ante una transformación canónica. Junto con los paréntesis de Lagrange, satisfacen la siguiente relación: para un conjunto $2f$ de funciones dinámicas independientes $\{u_i(q,p)\}$,

$$\sum_{\ell=1}^{2f} \{u_\ell, u_i\} [u_\ell, u_k] = \delta_{ik}, \tag{9.131}$$

la prueba es directa: sustituyendo las expresiones correspondientes para los paréntesis de Lagrange y de Poisson y usando el hecho que el conjunto de variables u_ℓ y u_k son independientes, es decir; $\frac{\partial u_\ell}{\partial u_k} = \delta_{\ell k}$, la ecuación 9.131 resulta una igualdad.

Además, si el conjunto $\{P, Q\}$ es canónico, $\{P_\ell, Q_i\}_{pq} = \delta_{\ell i}$ y $\{Q_\ell, Q_i\}_{p,q} = 0$, tendremos entonces el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} [Q_i, P_j]_{p,q} &= \delta_{ij} \\ [Q_j, Q_i]_{p,q} &= 0 \\ [P_j, P_i]_{p,q} &= 0, \end{aligned} \tag{9.132}$$

análogamente

$$\begin{aligned} [q_i, q_j]_{p,q} &= 0 \\ [p_i, p_j]_{q,p} &= 0 \\ [q_i, p_j]_{p,q} &= \delta_{ij} \quad , \end{aligned} \tag{9.133}$$

estos son los paréntesis de Poisson fundamentales.

Las ecuaciones anteriores permiten demostrar la siguiente propiedad de los paréntesis de Poisson: sean u_1 y u_2 dos funciones dinámicas arbitrarias de las variables canónicas $\{q, p\}$, entonces

$$[u_1, u_2]_{qp} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_j} \frac{\partial u_2}{\partial p_j} - \frac{\partial u_1}{\partial p_j} \frac{\partial u_2}{\partial q_j} \right), \tag{9.134}$$

tomando en cuenta la transformación canónica descrita por la ecuación (9.103) podemos reescribir la última ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [u_1, u_2]_{q,p} = &\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial u_1}{\partial q_j} \sum_{k}^{f} \left(\frac{\partial u_2}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial u_2}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \\ &- \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial u_1}{\partial p_j} \sum_{k}^{f} \left(\frac{\partial u_2}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial u_2}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right), \end{aligned} \tag{9.135}$$

arreglando términos obtenemos la siguiente ecuación:

$$[u_1, u_2]_{q,p} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial u_2}{\partial Q_k} [u_1, Q_k]_{q,p} + \frac{\partial u_2}{\partial P_k} [u_1, P_k]_{q,p} \right). \tag{9.136}$$

Los paréntesis de Poisson en el lado derecho pueden ser calculados por el mismo método (usando esta misma ecuación), resultan ser,

$$\begin{aligned}[u_1, Q_k]_{q,p} &= \frac{\partial u_1}{\partial Q_k}, \\ [u_1, P_k]_{q,p} &= -\frac{\partial u_1}{\partial P_k},\end{aligned} \tag{9.137}$$

de tal forma que

$$[u_1, u_2]_{q,p} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial u_1}{\partial Q_k}\frac{\partial u_2}{\partial P_k} - \frac{\partial u_1}{\partial P_k}\frac{\partial u_2}{\partial Q_k} \right) = [u_1, u_2]_{Q,P}\,. \tag{9.138}$$

Equivalentemente: si los conjuntos $\{q, p\}$ y $\{Q, P\}$ son canónicos, entonces el paréntesis de Poisson de dos variables dinámicas u_1 y u_2 es invariante canónico.

Algunas propiedades básicas los paréntesis de Poisson son las siguientes:

$$\begin{aligned}&[u, c] = 0\ ,\ c = cte \\ &[u_1 + u_2, u_3] = [u_1, u_3] + [u_2, u_3] \\ &[u_1, u_2 \cdot u_3] = [u_1, u_2] \cdot u_3 + u_2 \cdot [u_1, u_3] \\ &[u_1, [u_2, u_3]] + [u_2, [u_3, u_1]] + [u_3, [u_1, u_2]] = 0.\end{aligned} \tag{9.139}$$

esta última relación se llama la igualdad de Jacobi.

Ecuaciones de movimiento y los paréntesis de Poisson

Con ayuda de los paréntesis de Poisson, las ecuaciones canónicas de movimiento pueden escribirse fácilmente; por ejemplo, si H es la hamiltoniana de un sistema mecánico, entonces

$$[q_i, H] = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \tag{9.140}$$

o bien

$$\dot{q}_i = [q_i, H]\,; \tag{9.141}$$

análogamente,

$$\dot{p}_i = [p_i, H]\,, \tag{9.142}$$

las cuales son las ecuaciones de movimiento de q_i y p_i escritas en términos de los paréntesis de Poisson .

También resulta inmediato probar que para cualquier función dinámica $u = u\,(q, p, t)$ su derivada temporal se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial u}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \dot{u} &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \tag{9.143}$$

que también puede escribirse en forma muy compacta de la siguiente forma:

$$\dot{u} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{9.144}$$

Esta forma de escribir la dinámica o la evolución temporal de cualquier función dinámica $u(q, p, t)$ nos permite extraer información sobre las constantes de movimiento. Para funciones u que no dependan explícitamente del tiempo, *i.e.*, si $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ entonces

$$\dot{u} = [u, H] \tag{9.145}$$

y si u es constante del movimiento $[u, H] = 0$, esto significa que cualquier constante de movimiento tiene paréntesis de Poisson con la hamiltoniana igual a cero[26].

En particular si H no es una función explícita del tiempo, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$,

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] = 0 \tag{9.146}$$

[26]Si la integral de movimiento no tiene dependencia explícita del tiempo, usualmente se le llama constante de movimiento (ver [19]).

y H es constante de movimiento, lo cual es un teorema ya probado: si la hamiltoniana no es función explícita del tiempo, ésta se conserva y en casos particulares corresponde a la energía mecánica total.

La relación (9.144) permite identificar formalmente a las constantes de movimiento, con ayuda de la última de las relaciones (9.139). Podemos establecer el siguiente teorema: *Si u y v son constantes de movimiento $[u, H] = [v, H] = 0$ tendremos entonces que $[H, [u, v]] = 0$, $[u, v]$ también es una constante de movimiento*[27]. Este teorema puede usarse para encontrar nuevas integrales del movimiento, aunque la mayoría de los casos produce relaciones triviales o bien funciones de las integrales de movimiento ya conocidas.

De utilidad frecuente son los paréntesis de Poisson del momento angular, los cuales pueden calcularse directamente:

$$\begin{aligned} &[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \quad , \quad i, j, k = x, y, z \\ &\left[L_i, L^2\right] = 0 \, , \\ &\left[\mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \, , \; L^2\right] = 0 \quad , \quad \mathbf{n} = \tfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = cte \quad , \end{aligned} \tag{9.147}$$

el vector $\mathbf{n}$ identifica cualquier dirección constante. El tensor de tercer rango, totalmente antisimétrico se define como sigue,

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{lll} +1 & (ijk) & ciclico \\ -1 & (ijk) & no\ ciclico \\ 0 & (ijk) & indices\ repetidos \end{array} \right\} .$$

Es conveniente señalar que los momentos L_i, L_j, L_k, no satisfacen la relación (9.132), pues ellos no son momentos canónicos conjugados, sólo uno de ellos puede ser canónico conjugado a una variable angular. por ejemplo L_k es el momento canónico conjugado a la variable esférica ϕ.

[27] Para el caso de funciones u y v que dependan del tiempo, el teorema sigue siendo válido [19] .

9.10. Teoría de Hamilton-Jacobi

Las transformaciones canónicas han sido útiles en el estudio de la estructura formal de la mecánica clásica y para obtener propiedades físicas de sistemas mecánicos (y en general de sistemas físicos); ahora las usaremos para plantear formalmente la solución de problemas mecánicos por un nuevo método, el de Hamilton-Jacobi.

Mediante una transformación canónica podemos encontrar un nuevo conjunto de coordenadas y momentos en el cual las ecuaciones de movimiento toman su forma más simple; por ejemplo,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = 0 \ , \ \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \ ; \ \ i = 1, 2, ..., f \ . \qquad (9.148)$$

La forma más simple corresponde a $\mathcal{H} = cte.$ donde $\mathcal{H}$ es la hamiltoniana en el nuevo sistema de coordenadas y momentos; dicha constante puede hacerse cero por un simple cambio en la función generadora[28], de tal forma que tendríamos:

$$\mathcal{H} = H\left(q, p, t\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \qquad (9.149)$$

donde $\mathcal{S}$ es la función generadora de la transformación canónica. Si la función $\mathcal{S}$ la escogemos con argumentos q, P (una función del tipo 2 de la tabla 9.1) tendremos que los momentos en el sistema original de coordenadas canónicas son:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} \ , \ \ i = 1, 2, ..., f \quad , \qquad (9.150)$$

los nuevos momentos $P_i = \alpha_i$ son constantes porque $\mathcal{H}$ es nula. Sustituyendo a p_i en la hamiltoniana original obtenemos que la ecuación (9.149) se transforma en

$$H(q_1, q_2, ..., q_f, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_f}, t) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \quad , \qquad (9.151)$$

[28]Si la función generadora $\mathcal{S}$ transforma a $\mathcal{H} = c$ entonces $\mathcal{S}^{'} = \mathcal{S} - ct$, con $c = cte$, transforma al nuevo hamiltoniano $\mathcal{H}^{'} = 0$.

esta última ecuación se conoce con el nombre de ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J). Ella es una ecuación diferencial parcial en $f+1$ variables, las f variables q_i y el tiempo, cuya solución proporciona la función generadora de la transformación canónica que resuelve trivialmente a las ecuaciones de movimiento[29]

$$\begin{matrix} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} Q_i = \beta_i = cte \\ P_i = \alpha_i = cte \end{matrix} \quad , \quad i = 1, 2, ..., f. \tag{9.152}$$

Denotemos por $\mathcal{S}(q_i, \alpha_i, t)$ a la solución de la ecuación (9.151) $\mathcal{S}$ se llama la función principal de Hamilton. La transformación canónica define a las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial q_i} = p_i(q, \alpha, t) \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = Q_i(q, \alpha, t) = \beta_i \quad , \end{aligned} \tag{9.153}$$

usando las ecuaciones para $Q_i = \beta_i = cte$ e invirtiendo éstas, tendremos la solución al problema para la hamiltoniana H. Estas funciones Q_i junto con la ecuación de H-J, proporcionan las ecuaciones diferenciales que completan el sistema de ecuaciones diferenciales que determina la solución para la función principal de Hamilton. En este formalismo las integrales de movimiento, los momentos α_i, deben ser conocidas. La solución puede escribirse de la siguiente forma:

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \qquad , \qquad p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad , \quad i = 1, 2, ..., f, \tag{9.154}$$

las constantes α_i y β_i pueden relacionarse con la $2f$ constantes iniciales q_i^0 y p_i^0; en este caso las constantes α_i y β_i, $i = 1...f$,

[29]Debemos ser cuidadosos con esta afirmación, debido a que una sola ecuación diferencial parcial en f variables no determina su solución. En la práctica este planteamiento es útil sólo cuando se conocen f integrales de movimiento,. Un caso análogo a la ecuación de H-J es la ecuación de Schrödinger, que presenta la misma problemática.

son el total de integrales de movimiento necesarias para resolver el problema (ver capítulo 4).

La ecuación de Hamilton-Jacobi permite plantear la solución del sistema mecánico por medio de una transformación canónica generada por $\mathcal{S}(q, \alpha, t)$. Entonces el problema es equivalente a resolver una ecuación diferencial parcial en $f + 1$ variables, las coordenadas q_i y el tiempo[30].

Es útil conocer el significado físico de la función principal de Hamilton $\mathcal{S}$, el cual podemos obtener de la ecuación (9.106), poniendo $\mathcal{H} = 0$ y $\dot{Q}_i = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= \sum p_i \dot{q}_i - H = \mathcal{L}\left(q, \dot{q}; t\right), \\ \mathcal{S} &= \int \mathcal{L}\left(q, \dot{q}; t\right) dt + cte \quad , \end{aligned} \tag{9.155}$$

esto es, la función principal de Hamilton es la integral indefinida de la lagrangiana. A la función $\mathcal{S}$ también se le llama acción . Esto no significa que podamos conocer a $\mathcal{S}$ directamente, pues la integral no se puede realizar hasta que no se conoce la forma explícita de $\mathcal{L}$ como función del tiempo, *i.e.*, hasta que se ha resuelto el problema y se encuentran a q_i y p_i como funciones del tiempo.

Cuando el sistema es conservativo H no es una función explícita del tiempo, entonces podemos simplificar (ver ecuación 9.109),

$$\text{si} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \ , \ \ H\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \tag{9.156}$$

[30]Nótese que las constantes $\alpha_i = P_i$ no están determinadas por la ecuación de Hamilton-Jacobi. Cada problema en particular sugiere cómo seleccionarlas, resultando conveniente escogerlas como las integrales de movimiento o funciones de ellas. Esto se debe a que la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial en f variables, que no determina totalmente el problema.

y la función $\mathcal{S}$ es separable en el tiempo y las coordenadas generalizadas, es decir

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - ct \tag{9.157}$$

con $c = cte$ y esta constante es la energía E (siendo más precisos, es el valor constante de la hamiltoniana). Debemos hacer notar que esta última expresión permite escribir que

$$E = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}. \tag{9.158}$$

Si observamos la ecuación (9.158) estaríamos tentados a reconocer a la energía y al tiempo como variables canónicas conjugadas; sin embargo, esto no es posible pues ellas no tienen paréntesis de Poisson igual a 1. Más aún, no se puede definir el paréntesis de Poisson del tiempo con cualquier otra variable debido a que el tiempo es la variable independiente en toda descripción mecánica.

En estas condiciones la ecuación de H-J se reduce a

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = c = E, \tag{9.159}$$

W es la función característica de Hamilton. La función W es nuevamente una FG de una transformación canónica, que cumple con las siguientes igualdades:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \ , \ Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \ ; \ \alpha_i = P_i \ . \tag{9.160}$$

A la función W también le podemos asignar significado físico; consideremos

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i, \tag{9.161}$$

entonces

$$W = \int \sum_i p_i \dot{q}_{\cdot i} dt, \tag{9.162}$$

es decir,W es la acción A definida en la ecuación (9.90). En términos de ella la ec. (9.157) se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{S}(q,\alpha,t) = A(q,\alpha) - Et. \tag{9.163}$$

Ambas formas de la acción, $\mathcal{S}$ y A, pueden ser calculadas para sistemas conservativos y donde se conocen las constantes α_i. Como ejemplo resolvemos a continuación el caso del oscilador armónico simple.

9.10.1. El oscilador armónico

Consideremos la hamiltoniana de un oscilador armónico simple,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2, \tag{9.164}$$

escribiendo al momento como la derivada de la acción $\mathcal{S}$ (la función generadora)

$$p = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}, \tag{9.165}$$

resulta la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x})^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0, \tag{9.166}$$

la solución para la función principal de Hamilton es separable,

$$\mathcal{S}(x,\alpha,t) = W(x,\alpha) - ct, \tag{9.167}$$

donde α es una constante. La ecuación que determina a la función W es

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + \frac{k}{2}x^2 = c = E, \tag{9.168}$$

es muy fácil probar que la constante de separación es la energía E. La solución para la función característica es inmediata:

$$W(x,\alpha) = \sqrt{mk}\int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}dx. \tag{9.169}$$

Como mencionamos previamente, la constante de movimiento α no está determinada por la ecuación H-J, si en la ecuación (9.169) la seleccionamos proporcional a la única integral de movimiento que conocemos, la energía, *i.e.*, $\alpha = P = E/c_1$ podemos obtener la solución para la coordenada Q_x :

$$Q_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2c_1\alpha}{k} - x^2}} - t; \tag{9.170}$$

que tiene la solución inmediata

$$Q_x = x = \sqrt{\frac{2c_1\alpha}{k}} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \beta), \tag{9.171}$$

con las condiciones iniciales apropiadas la constante β se puede hacer cero. Esta es la muy conocida solución para el oscilador armónico simple. Es muy fácil probar que la energía del oscilador es

$$E = \frac{kx_0^2}{2}., \quad x_0 = \sqrt{\frac{2c_1\alpha}{k}}, \tag{9.172}$$

x_0 es la amplitud de máxima oscilación. La ecuación de Hamilton-Jacobi nos conduce rápidamente a que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0, \tag{9.173}$$

con H una constante que corresponde a la energía. Calculemos, ahora que el problema está resuelto, a la función principal de Hamilton: de las ecuaciones (9.167) y (9.169) obtenemos

$$S = kx_0^2 \int (sen^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{1}{2}) dt = \int \mathcal{L}(t) dt, \tag{9.174}$$

confirmando que la acción $\mathcal{S}$, o función generadora, o función principal de Hamilton es la integral indefinida de la lagrangiana.

9.11. Variables de acción y de ángulo

Una simplificación ulterior en la ecuación de Hamilton-Jacobi ocurre cuando el sistema es conservativo y sus grados de libertad son separables; entonces, la función característica acepta una solución del siguiente tipo:

$$W = \sum_{i=1}^{f} W_i \left(q_i, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_f \right), \tag{9.175}$$

en este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi se separa en f ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$H_i \left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_f \right) = \alpha_i; \tag{9.176}$$

cada una de estas ecuaciones contiene a la variable q_i y la derivada dW_i/dq_i, son ecuaciones ordinarias de primer orden y por lo tanto el sistema es soluble. Inversamente, todo sistema soluble tiene ecuación de $H-J$ que es separable en sus variables, dependiendo de que el conjunto de coordenadas generalizadas usado sea el apropiado. Por ejemplo: el campo central tiene ecuación de $H-J$ separable en coordenadas esféricas pero no siempre es separable en coordenadas cartesianas. Claramente no todos los sistemas mecánicos son solubles por separación de variables, si resultan separables significa que podemos conocer f integrales de movimiento, estas integrales de movimiento son las constantes de separación en la ecuación de H-J.

De gran utilidad e importancia en la física son los sistemas que tienen ecuación de $H-J$ separables y que tienen movimiento periódico; un sistema periódico es aquél que repite su estado físico después de un cierto tiempo llamado periodo, i.e., $q\left(t+\tau\right) = q\left(t\right)$ y $p\left(t+\tau\right) = p\left(t\right)$, $\tau =$ período [31]. Consideremos un sistema periódico con ecuación de $H-J$ separable

[31] A este tipo de movimiento se le llama libración; existe otro tipo de movimiento periódico llamado rotación en el cual $q\left(t+\tau\right) = q\left(t\right) + q_0$ y $p\left(t+\tau\right) = p\left(t\right)$. En ambos casos la teoría aquí descrita es igualmente aplicable.

al menos en un grado de libertad i esto significa que la ecuación (9.176) para el grado de libertad i es independiente del movimiento del resto de grados de libertad. Si cada grado de libertad es separable, pueden analizarse por separado. En este caso tendremos

$$p_i = \frac{\partial W_i\left(q_i, \alpha\right)}{\partial q_i} = p_i\left(q_i, \alpha\right); \tag{9.177}$$

definimos entonces a la variable de acción[32] J_i asociada al grado de libertad i como

$$J_i = \oint p_i dq_i; \tag{9.178}$$

la integral se efectúa sobre un período completo de la variable q_i. Usando la ecuación (9.177) podemos escribir

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i\left(q_i, \alpha\right)}{\partial q_i} dq_i = J_i\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_f\right), \tag{9.179}$$

si todos los grados de libertad son separables y periódicos[33], existen f ecuaciones del tipo (9.179), de tal forma que podemos invertir y obtener

$$\alpha_i = \alpha_i\left(J_1, J_2, ..., J_f\right)$$

que sustituidos en W permiten escribir a

$$W_i = W_i\left(q_i, J_1, J_2..., J_f\right)\ ,\ i = 1, 2, ..., f; \tag{9.180}$$

con este cambio en la función generadora W_i obtendremos nuevas coordenadas generalizadas Θ_i, tales que

$$\Theta_i = \frac{\partial W_i}{\partial J_i}, \tag{9.181}$$

[32]El nombre de variable de acción proviene del hecho de tener dimensiones de acción.

[33]En el caso en que no todos los grados de libertad sean separables y periódicos, podemos invertir para las α_i que sí lo sean, y sustituir en (9.175), el resto del desarrollo sigue igual.

se les llama variables de ángulo, es decir, no tienen dimensiones (es relativamente fácil probar que Θ_i y J_i son variables canónicas conjugadas, es decir, tienen paréntesis de Poisson igual,a 1, (ver por ejemplo la referencia [16]).

Las ecuaciones de movimiento para éstas variables serán:

$$\dot{\Theta}_i = \frac{\partial H\left(J_1 J_2 ... J_f\right)}{\partial J_i} = v_i\left(J_1 J_2 ..., J_f\right), \tag{9.182}$$

estas velocidades son constantes porque sólo dependen de las constantes α_i, y tienen por solución inmediata

$$\Theta_i = \nu_i t + \gamma_i \tag{9.183}$$

con γ_i constante. Lo útil en este resultado es que Θ crece linealmente con el tiempo y que ν_i tiene el significado de frecuencia, es la frecuencia en el movimiento periódico de q_i. Con este método se logra conocer, sin necesidad de resolver completamente el sistema, las frecuencias de un movimiento periódico para un hamiltoniano constante y de variables separables.

9.11.1. Campo central

Un caso importante donde el método de H-J es el problema del campo central[34]. Dos partículas que interaccionan mediante una fuerza dirigida a lo largo de la línea que une a dichas partículas; la interacción en este caso se puede escribir como sigue:

$$V_{12} = V\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right) = V(r), \tag{9.184}$$

la lagrangiana para este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^{\,2} - \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^{\,2} - V(r) = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^{\,2} + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^{\,2} - V(r) \tag{9.185}$$

[34]Para mayores detalles con respecto a la solución de este problema pueden consultarse las referencias [12, 16, 17].

donde $M = m_1 + m_2$ y $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ son respectivamente la masa del sistema o del CM y la masa reducida, $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$, la posición del centro de masa y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ la posición relativa de las partículas. El problema tiene entonces seis grados de libertad ($f = 6$); sin embargo, el movimiento del centro de masa es separable gracias a que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{CM} = \mathbf{P}_R = cte \quad , \tag{9.186}$$

lo cual nos deja con sólo tres grados de libertad para la coordenada relativa. En coordenadas esféricas la lagrangiana (9.185) se reduce a

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sen^2\,\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r) \tag{9.187}$$

con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \tfrac{d}{dr}\mathcal{L} = \tfrac{-\partial V}{\partial r} + \mu r\dot{\theta}^2 + \mu r\, sen^2\theta\dot{\phi}^2, \quad p_r = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r},\\
&\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \tfrac{d}{d\theta}\mathcal{L} = \mu r^2\, sen\,\theta\dot{\phi}^2, \qquad\qquad p_\theta = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta},\\
&\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \tfrac{d}{d\phi}\mathcal{L} = 0, \qquad\qquad p_\phi = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \mu r^2 sen^2\theta\dot{\phi} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = cte.
\end{aligned} \tag{9.188}$$

La solución de estas ecuaciones de movimiento para los grados de libertad (r, θ, ϕ), con las condiciones iniciales apropiadas, resuelve el problema. Este problema es soluble mediante cuadraturas pues existe el número suficiente de integrales de movimiento: P_x, P_y, P_z del CM, ℓz, la componente z del momento angular relativo al CM, $|\ell|$ el módulo del angular y la

energía E. En esta sección nos interesa ilustrar el método de H-J y evaluar las variables de acción, la solución al problema de campo central ya la realizamos (ver cap. 5).

De la Lagrangiana (9.187) con los momentos generalizados definidos por las ecuación de Lagrange obtenemos que la función de Hamilton,

$$H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\, sen^2\,\theta}\right) + V\,(r) \quad (9.189)$$

cuyas ecuaciones canónicas de movimiento son:

$$\begin{array}{lll} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{p_\phi^2}{\mu r^3 sen^2\,\theta} - \frac{\partial V}{\partial r} & , & \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{\mu r^2\, sen^3\,\theta} & , & \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 & , & \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{\mu r^2\, sen^2\,\theta} \end{array} \quad (9.190)$$

Utilizando la ecuación (9.159) encontramos la siguiente ecuación de H-J para el problema del campo central:

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\, sen^2\,\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right] + V\,(r) = E$$

$$E = cte, \quad (9.191)$$

hemos puesto que $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$; en este caso la primera constante de separación es la energía, es decir:

$$S = (r, \theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; t) = W\,(r, \theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - Et\ .$$

La ecuación (9.191) es a su vez separable en las variables r, θ, ϕ de tal forma que podemos escribir a la función característica de Hamilton de la siguiente manera

$$W\,(r, \theta, \phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = W_r\,(r) + W_\theta\,(\theta) + W_\phi\,(\phi)$$

donde las α_j son constantes, con esto obtenemos una reducción para la ecuación de H-J.

$$\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\,sen^2\,\theta}\left(\frac{dW_\phi}{d\phi}\right)^2=2\mu\left(E-V\left(r\right)\right), \tag{9.192}$$

donde hemos escrito derivadas totales en lugar de derivadas parciales, esta última expresión se puede escribir también como

$$r^2\,sen^2\,\theta\left[2\mu\left(E-V\left(r\right)\right)-\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right]=$$

$$=\left(\frac{dW_\phi}{d\phi}\right)^2, \tag{9.193}$$

el lado izquierdo es sólo función de r y θ, mientras que el derecho es de ϕ, esto es posible sólo si

$$\frac{dW_\phi}{d\phi}=p_\phi=m=cte \quad ; \tag{9.194}$$

es decir, el momento canónico p_ϕ es una constante. Arreglando esta última ecuación tendremos que

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{m^2}{sen^2\,\theta}=2\mu\,r^2\left(E-V\left(r\right)\right)-r^2\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 . \tag{9.195}$$

Nuevamente, para que esto se satisfaga necesitamos que

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{m^2}{sen^2\,\theta}=\ell^2 \tag{9.196}$$

y

$$2\mu\,r^2\left(E-V\left(r\right)\right)-r^2\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2=\ell^2=cte. \tag{9.197}$$

En resumen, el sistema se separa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{dW_\phi}{d\phi} = m \\ p_\theta &= \frac{dW_\theta}{d\theta} = \sqrt{\ell^2 - \frac{m^2}{sen^2\,\theta}} \\ p_r &= \frac{dW_r}{dr} = \sqrt{2\mu\,\left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{\ell^2}{r^2}}\ , \end{aligned} \tag{9.198}$$

las constantes m, ℓ y E tienen aquí el sentido de proyección del momento angular sobre el eje z, módulo del momento angular y la energía respectivamente; son las tres constantes de movimiento que hacen al problema soluble. Claramente, el movimiento en ϕ y en θ son periódicos (véase relaciones para p_θ y p_ϕ y para $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$), de tal forma que se pueden definir las variables de acción

$$\begin{aligned} J_\phi &= \oint p_\phi\, d\phi = \oint m d\phi = 2\pi m \\ J_\theta &= \oint p_\theta\, d\theta = \oint \left(\ell^2 - \tfrac{m^2}{sen^2\,\theta}\right)^{1/2} d\theta; \end{aligned} \tag{9.199}$$

en esta última expresión es necesario que $\ell \geq m$ para que p_θ sea real (el momento angular necesariamente es mayor o igual que cualquiera de sus componentes), los límites de integración para θ serán aquellos valores para los cuales se anule el integrando

$$\theta_1 = sen^{-1}\left(m/\ell\right)\ \ ,\ \ \theta_2 = \pi - sen^{-1}\left(m/\ell\right)\ \ , \tag{9.200}$$

resultando que

$$J_\theta = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\ell^2 - m^2\, sen^2\theta\right)^{1/2} d\theta = 2\pi\left(\ell - m\right)\ \ . \tag{9.201}$$

Si las constantes m, ℓ, E, y la función $V\left(r\right)$ son tales que el movimiento en r es periódico, entonces podemos definir a la variable de acción asociada a la coordenada r,

$$J_r = 2\int_{r_2}^{r_1} \sqrt{2\mu\,\left(E - V\left(r\right)\right) - \frac{\ell^2}{r^2}}\ dr \tag{9.202}$$

donde r_1 y r_2 son los valores de r que anulan el integrando, i.e., son los puntos de retorno. Obteniendo para las frecuencias el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \nu_r &= \frac{\partial H}{\partial J_r} \\ \nu_\theta &= \frac{\partial H}{\partial J_\theta} \\ \nu_\phi &= \frac{\partial H}{\partial J_\phi}. \end{aligned} \tag{9.203}$$

Un problema de campo central muy importante es el de Kepler, para el cual $V = K/r$ (dependiendo del valor de K podemos tener atracción gravitatoria $K = -GMm$ o el campo eléctrico de una carga puntual $K = q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0$); en este caso el movimiento puede ser periódico en la variable r (si la órbita es elíptica o circular); recordemos que $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ y que el movimiento del centro de masa ha sido separado. Para este caso

$$J_r = 2\int_{r1}^{r2} \left[2\mu\,(E - K/r) - \frac{\ell^2}{r^2}\right]^{1/2} dr \tag{9.204}$$

con

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{K}{2E}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu K^2}}\right) \tag{9.205}$$

integral que se puede efectuar[35], resultado que

$$J_r = -2\pi\ell + \frac{2\pi\mu K}{(-2\mu E)^{1/2}}, \tag{9.206}$$

aquí E debe ser negativa, de lo contrario el movimiento no es periódico. Sustituyendo el valor de ℓ en términos de J_θ y J_ϕ tendremos

$$E = -\frac{2\pi^2\mu K^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2} = H\left(J_r, J_\theta, J_\phi\right), \tag{9.207}$$

[35]Detalles del cálculo pueden verse en la referencia [17].

con el hamiltoniano escrito en variables de acción podemos calcular las frecuencias

$$\begin{aligned}\nu_r &= \frac{\partial H}{\partial J_r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\frac{1}{\pi\sqrt{K^2}}\left(\frac{2\pi^2\mu K^2}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^2}\right)^{3/2}\\ \nu_\theta &= \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \nu_r\\ \nu_\phi &= \frac{\partial H}{\partial J_\phi} = \nu_r,\end{aligned} \tag{9.208}$$

es decir $\nu_r = \nu_\theta = \nu_\phi$ y la órbita es cerrada debido a que las tres frecuencias son iguales, al movimiento se le llama degenerado por tener las tres frecuencias iguales.

Por último, la función generadora o función característica se puede calcular fácilmente (ver ecuación (9.198)):

$$W = W\left(r,\theta,\phi,J_r,J_\theta,J_\phi\right) = \int\left(p_r dr + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi\right) \tag{9.209}$$

mientras que la función principal de Hamilton resulta ser:

$$\mathcal{S}\left(r,\theta,\phi,J_r,J_\theta,J_\phi\right) = \int\left(p_r dr + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi\right) - \int E\ dt; \tag{9.210}$$

con los momentos dados por (9.198) y recordemos que la energía es una constante.

Es necesario escribir a m, ℓ y E en términos de J_r, J_θ, J_ϕ, mediante (9.203) y (9.204); una vez que se conoce a W se conoce la transformación canónica y de esta forma al movimiento del sistema. Debemos hacer notar que el problema del campo central $V(r) = K/r$ es soluble en el método de Hamilton-Jacobi gracias a que existieron las tres integrales de movimiento: m, ℓ, E. Nótese que no requerimos de los momentos generalizados en el nuevo sistema de coordenadas, en su lugar usamos las integrales de movimiento disponibles.

9.12. La ecuación de Schrödinger

Esta sección la dedicamos a una de las aplicaciones más importantes que encontró el método de Hamilton y Jacobi y del principio variacional, se trata del uso que de ellos hizo E. Schrödinger para obtener la ecuación de movimiento cuántica. La historia de este desarrollo es mucho más compleja de la que aquí presentamos y escapa al contexto de la mecánica clásica; sin embargo, con este ejemplo queremos ilustrar la aplicabilidad de los principios variacionales que surgieron en la mecánica clásica.

Hacia fines del siglo XIX empezaron a surgir una serie de experimentos que no pudieron ser explicados en el marco de las teorías físicas existentes, los dos más notables (pero no los únicos) son: 1) El aparentemente fallido experimento de Michelson y Morley, 2) y la imposibilidad de explicar la densidad espectral de la radiación de cuerpo negro; el primero dió origen a la teoría de la relatividad formulada por A. Einstein en 1905 y el segundo, explicado por Max Planck en 1900, condujo a la teoría cuántica, establecida principalmente por E. Schrödinger en 1926.

Los fenómenos más importantes que condujeron a la teoría cuántica y su primera explicación fueron:

1. La radiación de cuerpo negro o radiación de cavidad. Para explicar esta radiación Planck propuso que los osciladores que forman las paredes de la cavidad en la que se encierra a la radiación electromagnética en equilibrio termodinámico con las paredes sólo pueden tener energías que sean múltiplos enteros de un valor fundamental llamado quantum de energía; *i.e.*, $E = n\varepsilon = nh\nu$, donde $h = 2\pi\hbar$ es una constante de proporcionalidad llamada la constante de Planck. Con esta hipótesis se logró reproducir la densidad espectral de la radiación de cavidad que se

observaba experimentalmente; sin embargo, en opinión de muchos investigadores de la época y principalmente del propio M. Planck, esta hipótesis era inadmisible por romper con los conceptos prevalecientes en la época con la continuidad de las variables dinámicas como la energía. La hipótesis del quantum fue generalmente rechazada, hasta que en 1905 A. Einstein tomó la idea cuántica y la aplicó al campo electromagnético, obteniendo una explicación apropiada para el efecto fotoeléctrico, que también carecía de una explicación en el marco de la física de la época. Poco tiempo después el mismo Einstein aplicó nuevamente la hipótesis cuántica a los iones oscilando en un sólido cristalino y explicó satisfactoriamente el comportamiento del calor específico de los sólidos a muy bajas temperaturas. La hipótesis de Planck no era posible obtenerla de ningún principio físico conocido en esa época.

De acuerdo al desarrollo que presentamos en las secciones previas, podemos identificar las propiedades dinámicas de un oscilador armónico con base en las variables de acción y ángulo. Consideremos la variable de acción para un oscilador armónico simple:

$$J_x = \oint p_x dx, \tag{9.211}$$

que se puede arreglar en

$$J_x = \oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = 2\oint T dt \tag{9.212}$$

donde T es la energía cinética. Recordando el teorema del virial para el oscilador armónico (ver sección 4.3):

$$\overline{T} = \overline{V} = \frac{1}{2}\overline{E}, \tag{9.213}$$

de tal forma que de estas dos últimas ecuaciones podemos obtener que

$$\oint p_x dx = 2\overline{T}t = \overline{E}\tau \tag{9.214}$$

donde τ es el periodo de oscilación. Si ahora postulamos que la variable de acción está cuantizada, *i.e.*, obtenemos que

$$\oint p_x dx = \overline{E}\tau = nh \tag{9.215}$$

que fácilmente podemos arreglar a

$$\overline{E} = n\varepsilon = nh\nu = n\hbar\omega, \tag{9.216}$$

donde $\nu = \frac{1}{\tau}$ es la frecuencia del oscilador. Este es el postulado de Planck; esto significa que el postulado cuántico de Planck se puede reemplazar por el siguiente postulado:

Para un oscilador armónico la variable de acción J_x está cuantizada en unidades de h, la constante de Planck.

2. Líneas espectrales. Durante la última parte del siglo XIX, los físicos y químicos sabían que los átomos y moléculas poseían espectros de radiación y absorción que caracterizaban a cada elemento, *i.e.*, tienen líneas espectrales características. En el marco de la física clásica no fue posible explicar la estructura de estas líneas espectrales, ni siquiera la del elemento más simple, el átomo de hidrógeno. Para 1911 E. Rutherford realizó su famoso experimento de dispersión de partículas α por átomos de oro, cuyo resultado fundamental fue el descubrimiento del núcleo atómico con el cual se modeló al átomo como un sistema planetario microscópico, en el que los electrones orbitan al núcleo de la misma forma que los planetas orbitan al sol. En 1913 las líneas espectrales recibieron una explicación satisfactoria a manos de N. Bohr que supuso órbitas circulares para los electrones en el campo central producido por el núcleo masivo de carga positiva; el modelo fue refinado posteriormente por Wilson y Sommerfeld incluyendo órbitas elípticas. El modelo se basa en postular que las tres variables de acción de un electrón en el campo coulombiano de un protón son cuánticas. Esto es, las variables de

acción del campo central son cuantizables:

$$J_r = \oint p_r dr = n_r h \tag{9.217}$$

$$J_\theta + J_\phi = \oint p_\theta d\theta + \oint p_\phi d\phi = kh, \tag{9.218}$$

donde n_r, $k = n_\theta + n_\phi$ son números enteros positivos. Con esta hipótesis la energía del electrón en este campo central se puede escribir (ver ecuación (9.207)) de la siguiente forma:

$$E = -\frac{2\pi^2 \mu K^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2} = -\frac{E_0}{n^2}, \tag{9.219}$$

con $n = n_r + k$ (ver por ejemplo ref.[45]). Junto con este postulado Bohr incluyó la ley de conservación de la energía en un proceso radiativo, explicando de esta manera las líneas espectrales del átomo de hidrógeno, pero sólo del átomo de hidrógeno. Este modelo tenía muchas fallas, indicando que la teoría (ahora llamada la vieja teoría cuántica de Bohr, Sommerfeld y Wilson) no era correcta. Aún así, el problema

3. de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno podía ser explicado bajo el siguiente postulado:

   Para un electrón en un campo central coulombiano las variables de acción J_r, J_θ y J_ϕ están cuantizadas en unidades de h, la constante de Planck.

4. Difracción de electrones por un cristal. En 1923 Davisson y Germer experimentaron con un haz de electrones que incidía sobre la superficie de un cristal, con lo que obtuvieron un patrón de dispersión de partículas muy parecido al patrón de difracción de un haz de rayos x incidiendo sobre un cristal. La explicación a este experimento (no es la

única ni la más conocida) la obtuvo W. Duane ese mismo año[36]. Siguiendo las reglas de cuantización de la vieja teoría cuántica: postuló que la variable de acción se cuantiza. En un cristal existe una periodicidad espacial, digamos que a lo largo del eje z, donde todos los planos cristalinos están igualmente espaciados por la distancia d; debido a la invariancia traslacional del cristal, un electrón del cristal tendrá momento p_z en la posición $z = z_0$ idéntico que en la posición $z = z_0 + d$, de tal forma que p_z es periódico y la variable de acción se cuantiza de la siguiente manera:

$$J_z = \oint p_z dz = nh, \quad n \text{ es entero.} \tag{9.220}$$

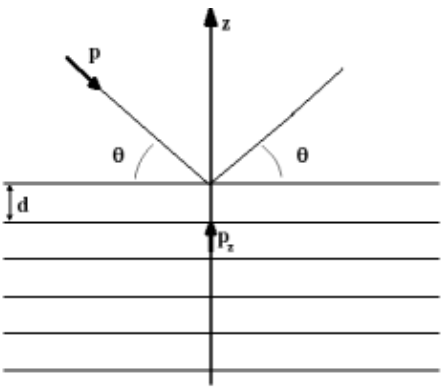

Figura 9.1. Un electrón incide a un ángulo θ, con momento p sobre la superficie de un cristal, el periodo espacial del cristal es d, las parículas en el cristal tienen componente del momento lineal en la dirección z igual a p_z.

Esta integral se efectúa sobre un periodo espacial d, si el electrón es libre o cuasi-libre, los únicos momentos per-

[36]Detalles sobre este cálculo se pueden consultar en la referencia [45]), este postulado fue refinado posteriormente por Compton, Epstein y Ehrenfest. Desafortunadamente esta hipótesis fue subestimada en esa época.

mitidos por la regla de cuantización serán aquéllos que cumplan con

$$p_z = \frac{nh}{d}. \tag{9.221}$$

Cualquier partícula que interaccione con este electrón podrá intercambiar momento de tal forma que el electrón del cristal quede en un estado permisible; por lo tanto, el cambio en el momento del electrón del cristal será

$$\Delta p_z = \Delta n \frac{h}{d} = n' \frac{h}{d}. \tag{9.222}$$

Por conservación de momento, el electrón incidente sufrirá en la colisión un cambio de momento (ver figura (9.1.)),

$$\Delta p = 2psen\theta = n' \frac{h}{d}, \tag{9.223}$$

esta expresión puede arreglarse de la siguiente forma:

$$n \frac{h}{p} = 2d \; sen \; \theta, \tag{9.224}$$

la cual es análoga a la ley de difracción de Bragg para rayos x [37] y que también cumplen los electrones difractados por el cristal.
El experimento de Davisson y Germer es explicado satisfactoriamente por la hipótesis de Duane-Compton:
Para un electrón en un cristal la variable de acción J_z está cuantizada en unidades de h, la constante de Planck.

Muchos experimentos que no encontraban una explicación en el contexto de la física clásica podían ser descritos por un solo postulado: la cuantización de las variables de acción. El paso lógico que seguía era preguntarse ¿Cómo cuantizar a un

[37] La ley de difracción de Bragg se obtendría si escribimos que $\lambda = \frac{h}{p}$, la cual es la hipótesis de L. De Broglie; nótese que en este caso no es necesaria dicha hipótesis. Aquí la definición de λ es sólo convencional.

sistema para el cual no se pueden definir variables de acción? Como por ejemplo el átomo de helio o una molécula, en los que sus variables dinámicas no son periódicas? La respuesta llegó en 1926 con el trabajo de E. Schrödinger [46], buscando las reglas para cuantizar la acción encontró la ecuación de movimiento de los sistemas cuánticos. La esencia del método de Schrödinger la describimos a continuación.

Consideremos un electrón en el átomo de hidrógeno para el cual las coordenadas relativas obedecen la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$H(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}) = E, \tag{9.225}$$

q son los grados de libertad del sistema. Supongamos ahora que la acción $\mathcal{S}$ la escribimos en términos de una nueva función a determinar $\Phi(q)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}(q, \alpha) = K \ln \Phi, \tag{9.226}$$

la constante K debe tener dimensiones de acción. Con esta forma para $\mathcal{S}$, podemos escribir la siguiente ecuación para los momentos generalizados:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = \frac{K}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial q}. \tag{9.227}$$

Para el hamiltoniano de un electrón en el campo central del protón obtenemos que la ecuación (9.225) se escribe como sigue:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Phi^2 = 0, \tag{9.228}$$

m es la masa del electrón, e es su carga. Para encontrar a la función Φ que proporciona la acción, Schrödinger exigió que la integral, sobre todo el espacio de la ecuación (9.228), sea extremal, *i.e.*, que satisfaga el siguiente principio variacional

$$\delta J = \delta \iiint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Phi^2\right] dxdydz = 0. \tag{9.229}$$

La función Φ debe hacer extremal a la integral sobre todo el volumen. Esta variación se hace ahora sobre tres parámetros, x, y, z en lugar del principio variacional de la ecuación (9.229) donde el parámetro es sólo el tiempo t. Para encontrar las condiciones que debe cumplir la función Φ es necesario aplicar las ecuaciones generalizadas de Euler-Lagrange para una variación con multiples parámetros. El problema variacional es ahora de la siguiente forma:

$$\delta J = \delta \iiint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \Phi^2 \right] dxdydz = 0. \tag{9.230}$$

donde hemos definido

$$\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \tag{9.231}$$

el cálculo de variaciones nos proporciona la siguiente condición sobre $F(\Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, x, y, z)$: para que se cumpla la ecuación (**??**) el integrando debe cumplir la *ecuación diferencial de Euler-Lagrange* [38]

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \Phi_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \Phi_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \Phi_z} = 0. \tag{9.232}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la ecuación (**??**) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función Φ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2m}{K} \left(E + \frac{e_0^2}{r} \right) \Phi = 0, \tag{9.233}$$

además, para que la función Φ tenga valor definido en la frontera (no tenga variación en la frontera del volumen de integración) debe satisfacer la siguiente restricción ,

$$\int \delta \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA = 0, \tag{9.234}$$

[38] Para los detalles de este teorema consúltese los capítulo 9 y 11 de la referencia [28].

donde dA es el elemento de área en la frontera del volumen de integración.

La ecuación (9.233) es la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno[39], es una ecuación de valores propios a la que deben imponérsele condiciones de frontera apropiadas

La ecuación (9.233) también puede escribirse así:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{2m}{K}\left(E + \frac{e_0^2}{r}\right)\Phi = 0 \tag{9.235}$$

En coordenadas esféricas esta ecuación es fácil de resolver; la función Φ sólo puede existir (es continua, cuadraticamente integrable, univaluada y finita) para funciones que se pueden identificar por un conjunto de valores de números enteros n, l, m que son los que cuantizan a la energía, el momento angular y la proyección z del momento angular[40]. Estos números cuánticos están asociados a las constantes de separación de la ecuación de Schrödinger y corresponden a integrales de movimiento: la energía, el modulo del momento angular y la proyección z del momento angular, de forma análoga a la ecuación de H-J clásica. Las condiciones de frontera que se imponen a la función Φ son las que cuantizan a estas variables dinámicas. Esta función llamada función de estado (o función de onda) aporta todo el resto de la información física que se puede obtener del sistema en un estado estacionario.

El método de Schrödinger consistió en definir operadores diferenciales para el hamiltoniano y el momento lineal con la

[39]En el trabajo original de Schrödinger la función se denota por Ψ, la razón es que Schrödinger estaba motivado por la idea de ondas de materia de L. De Broglie que se denotaba de manera generalizada por Ψ; sin embargo, en esta forma de plantear el problema la hipótesis de De Broglie no es necesaria.

[40]Sorprendentemente estos números cuánticos no coinciden con los de la teoría de Bohr, Sommerfeld y Wilson.

siguiente regla de cuantización:

$$p_x \to \widehat{\mathbf{p}}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{9.236}$$

$$H(r,p) \to \widehat{\mathbf{H}} = H(r,\widehat{\mathbf{p}}) \tag{9.237}$$

y la ecuación que determina la dinámica de un sistema microscópico en un estado estacionario es la ecuación de Schrödinger, el formalismo en el que se escribe la teoría cuántica es un formalismo hamiltoniano:

$$\widehat{\mathbf{H}}\Phi = E\Phi. \tag{9.238}$$

Este método de Schrödinger fue aplicado al oscilador armónico, obteniendo su función $\Phi(x)$ y su energía cuantizada[41]

$$\varepsilon = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) = h\nu(n+\frac{1}{2}). \tag{9.239}$$

Si la aplicamos a una red cristalina unidimensional en la dirección del eje z obtenemos la regla de cuantización de Duane para los electrones libres o cuasilibres (ecuación (9.221)).

La versión dependiente del tiempo de esta ecuación, descubierta por Schrödinger, es elevada a nivel de principio fundamental de la teoría cuántica. La ecuación fue aplicada a átomos más complejos, moléculas, cristales, núcleos, etc. Obteniendo una explicación muy apropiada para las correspondientes observaciones experimentales. La teoría cuántica se considera la teoría física más exitosa y más severamente probada sin que hasta la fecha se haya mostrado que esta teoría sea incorrecta[42].

Este es uno de los más notorios ejemplos de cómo los resultados de la mecánica clásica, en particular el principio variacional,

[41] Esta regla de cuantización tampoco coincide exactamente con el postulado de Planck.

[42] Para sistemas cuánticos de partículas con espín, relativistas, electromagnéticos, etc. debe usarse la versión apropiada de la ecuación de Schrödinger.

se aplican a diversos sistemas físicos con propiedades dinámicas muy diferentes; nótese que en la teoría cuántica los sistemas físicos no se describen por las trayectorias de las partículas.

9.13. Ejercicios

1. Usando el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, calcule la fuerza de reacción sobre una partícula restringida a moverse sobre la superficie interior de un cascarón esférico [6].

2. Una cuenta de masa m se inserta en una barra muy delgada que gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical fijo con velocidad angular ω, la barra guía a un resorte que sujeta a la partícula con el eje de giro. Obtenga las ecuaciones de movimiento en el formalismo de Hamilton: ¿Es la energía una constante de movimiento?, ¿cuáles son las constantes de movimiento en este sistema?

3. Una partícula cargada entra a una región donde hay un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\widehat{\mathbf{k}}$ (en la dirección z), con velocidad $\mathbf{v}_0$ haciendo un ángulo α con la dirección del campo. Obtenga el movimiento de la partícula usando el método de Hamilton. ¿Cuáles son las integrales de movimiento?.

4. El primer paso dentro de la formulación de Hamilton es escribir la función hamiltoniana y de ahí las ecuaciones de movimiento, obtenga la hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton para los siguientes sistemas:

   a) Oscilador armónico en una dimensión.
   b) Oscilador armónico en tres dimensiones.
   c) Péndulo doble.
   d) Dos partículas que interactúan por campo central.
   e) Trompo simétrico en un campo gravitatorio con un punto del eje de simetría fijo.
   f) Una partícula cargada en un campo electromagnético. Escriba en cada caso la hamiltoniana, las ecuaciones de movimiento, desacople las ecuaciones en caso de

que sea necesario. Señale las integrales de movimiento que existan.

5. Complete la tabla 9.1; es decir, obtenga las relaciones (9.109) cuando la función generadora es de la forma $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ ó $\mathcal{S}_4$.

6. Demuestre las propiedades de los paréntesis de Poisson expresadas en la ecuación (9.133).

7. Usando los paréntesis de Poisson, demuestre que el vector de Laplace Runge-Lenz es una constante de movimiento en el campo central $V(r) = -\alpha/r$.

8. Calcule la función característica de Hamilton para el oscilador armónico con un grado de libertad.

9. Demuestre que ν_i en la ecuación (9.183) es la frecuencia del movimiento de la coordenada q_i.

10. Demuestre que para el problema de Kepler las tres frecuencias, ν_r, ν_θ, ν_ϕ, son iguales; obtenga la función característica de Hamilton.

11. Obtenga las variables de acción y de ángulo para el oscilador armónico en tres dimensiones.

12. Incluya los postulados de Bohr y Sommerfeld: $J_i = n_i h$; $h = \text{cte}$ y obtenga la energía cuántica para un átomo de hidrógeno.

A

ABREVIATURAS Y NOTACIONES

SI, MKS	sistema internacional de unidades
SN	sistema natural de unidades
CGS	sistema de unidades gaussiano
TG	transformación galileana
SIR	sistema inercial de referencia
SNIR	sistema no inercial de referencia
CC	campo central
CR	cuerpo rígido
ecuación (N)	ecuación número N
referencia [N]	referencia bibliográfica número N
i. e.	(*id est*) esto es
FG	función generadora
CM	centro de masa
H-J	Hamilton-Jacobi
CR	cuerpo rígido

B

NOTACIÓN

$\underline{X}, \mathbf{X}, \overrightarrow{X}$	vector$X$
t	tiempo
m, M, μ	masa, masa total, masa reducida
$T, \mathbf{T}$	energía cinética, fuerza de tensión
$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$	vectores tangente, normal y binormal a la curva
V, U	energía o función potencial
E, ϵ	energía mecánica total
$\mathbf{F}$	fuerza
W	trabajo mecánico, función característica de Hamilton
$\mathcal{S}$	función principal de Hamilton
u, v, w, F, G	funciones dinámicas
$\mathcal{L}$	función de Lagrange o lagrangiana
$H, \mathcal{H}$	función de Hamilton o hamiltoniana
$\mathbf{I}$,I	tensor o matriz de inercia, momento de inercia
$q_i, Q_i,$	coordenada generalizada
$\{q\}, \{Q\}$	conjunto de coordenadas generalizadas
Q_j	fuerza generalizada
$p_i, P_i, (p), (P)$	momento generalizado, conjunto de momentos generalizados

$\mathbf{L}, \overrightarrow{\ell}$	vector de momento angular o cinético
$\mathbf{N}$	momento de la fuerza, torque
δ	variación a puntos fijos, desplazamiento virtual
Δ	variación libre
$\overrightarrow{\omega}, \mathbf{\Omega}, \omega, \Omega$	velocidad angular, frecuencia angular
e	carga eléctrica, excentricidad
e_0	carga del electrón
$\mathbf{E}$,$\mathcal{E}$, ϕ	campo eléctrico, potencial eléctrico
$\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$,$\mathcal{H}$	inducción magnética, potencial magnético, campo magnético
f	número de grados de libertad, frecuencia
ρ	densidad de masa o de carga
$\dot{\mathbf{A}}$	derivada con respecto del tiempo del vector $\mathbf{A}$
$\mathbf{r}$,r	vector de posición, magnitud del vector de posición
$\mathbf{g}$	aceleración de la gravedad
G	contante gravitacional
n	número de partículas, número entero
τ, T	periodo
$\mathbb{A}$	matriz de elementos a_{ij}

BIBLIOGRAFÍA

[1] K.R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley, N. Y. 1965.

[2] G. R. Fowles, *Analytical mechanics*, Holt, Rinehart and Winston, N. Y. 1962.

[3] F. W. Constant, *Theoretical Physics*, Addison Wesley, Mass. 1962.

[4] V. Barger y M. Olson, *Classical mechanics: a modern perspective*, McGraw-Hill, N. Y. 1995.

[5] H. Iro, *A modern approach to Classical Mechanics*, World Scientific, N. J. 2002.

[6] O. H. Hausser, *Introduction to the principles of mechanics*, Addisson-Wesley, N. Y. 1969.

[7] J. B. Marion, *Dinámica de partículas y sistemas*, Revertè, Barcelona 1995.

[8] U. Ingard y W. Krauskhaar, *Introduction to mechanics matter and waves*, Adisson-Wesley, N. Y. 1961.

[9] D. Halliday y R. Resnick, *Fundamentos de física*, CECSA, México 1978.

[10] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, N. Y. 1963.

[11] A. Sommerfeld, *Mechanics*, Academic Press, N. Y. 1952.

[12] H. Goldstein, *Mecánica clásica*, Revertè, España, 2002.

[13] H. Pollard, *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice Hall, N. J. 1966.

[14] E.T.Whittaker, *Analytical dynamics of particles and rigid bodies*, U. Press, Cambridge 1970.

[15] E. J. Routh, *Advanced dynamics of rigid bodies*, Dover Pub. Inc., N. Y. 1955.

[16] E.J. Saletan y A.H. Cromer, *Theoretical Mechanics*, J. Wiley, N.Y. 1971.

[17] H.C. Corben y P. Stehle, *Classical Mechanics*, Wiley-Topan, N. Y. 1960.

[18] D. T. Greenwood, Classical Dynamics, Dover, N. Y. 1977.

[19] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mecánica*, Revertè, México, 1965.

[20] G. Joss, *Theoretical Physics*, Dover Pub. Co., N. Y. 1950.

[21] E. Piña, *Dinámica de rotaciones*, UAM, México, 1996.

[22] J. Flores Valdés y G. Anaya D. *Dinámica del cuerpo rígido*, SEP FCE, México, 1989.

[23] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, U. Toronto Press, 1966.

[24] M. Spiegel, *Vector analysis*, Schaum's Pub. Co., N. Y. 1959.

[25] I. M. Gelfand y S. V. Fomin, *Calculus of variations;* Prentice-Hall, N. J. 1963.

[26] A. Mercier, *Variational principles of physics*, Dover Pub. Inc., N. Y. 1963.

[27] W. Yourgrau y S. Mandelstam, *Variational principles in dynamics and quantum theory*, Dover Pub. Inc., N. Y. 1968.

[28] R. Weinstock, *Calculus of variations*, Dover Pub. Inc., N. Y. 1974.

[29] G. Arfken, *Mathematical methods of physics*, Academic Press, N. Y. 1970.

[30] R. Courant anf D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience Pub. Inc., N. Y. 1966.

[31] G. E. Shilov, *Theory of linear spaces*, Prentice Hall, N. J. 1961.

[32] S. Perlis, *Theory of matrices*, Dover Pub. Inc., N. Y. 1991.

[33] E. Butkov, *Mathematical physics*, Addison Wesley, N. Y. 1968.

[34] R. Bellman, *Perturbation techniques in mathematics, physics, and engineering*, Holt, Rinehart and Winston, N. Y. 1964.

[35] D.A. Wells, *Lagrangian dynamics*, Schaum's series McGraw-Hill, N. Y. 1967.

[36] M.S. Spiegel, *Theoretical mechanics*, Schaum's series, McGraw-Hill, N. Y. 1967.

[37] L. Y. Kuo, *Problems and solutions on mechanics*, World Sci. Singapore, 1994.

[38] G.L.Kotkin y V. G. Serbo, *Problemas de mecánica clásica*, Mir, Moscú, 1980.

[39] W. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, N. Y. 1962.

[40] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, J. Wiley, N. Y. 1962.

[41] J. D. Kraus, *Electromagnetismo*, McGraw-Hill, México, 1986.

[42] W. Benson, J. W. Harris, H. Stoker y H. Lutz (eds.), *Handbook of physics*, Springer, N. Y. 2002.

[43] S. Gasiorowicz, *Quantum physics*, J. Wiley, N. Y. 1996.

[44] L. I. Schiff, *Quantum mechanics*, McGraw-Hill, N. Y. 1964.

[45] L. Pauling and E. B. Wilson, *Introduction to quantum mechanics*, McGraw-Hill, N. Y. 1935.

[46] E. Schrödinger, *Collected papers on wave mechanics*, Chelsea, Oxford 1927.

[47] G. Galilei, *Dialogue concerning the two chief world systems, Ptolemaic and Copernican* (primera ed. 1632), trad. S. Drake, U. California Press, Berkeley, 1962.

[48] G. Galilei, *Dialogue concerning the two new sciencse*, trad. S. Drake, U. California Press, Berkeley, 1962.

[49] I. Newton, *Mathematical principles of natural philosophy and his system of the world*, Trad. F. Cajori, U. California Press, Berkeley, 1966.

[50] Mécanique analytique, *Joseph-Louis Lagrange*, ed. 1788, Jacques Gabay, 1989.

[51] J. D. Bernal, *La ciencia de la ciencia*, UNAM México 1972.

[52] J. D. Bernal, *La ciencia de nuestro tiempo*, UNAM, México, 1972.

[53] R. Dugas, *A History of mechanics*, Dover, N. Y. 1988.

[54] C. Truesdell, *Ensayos de historia de la mecánica*, Tecnos, Madrid, 1975.

[55] J. Jeans, *Historia de la física*, Fondo de Cultura Económica, México, 1963.

[56] I. Asimov, *Enciclopedia biográfica de ciencia y tecnología*, Alianza, México, 1971.

[57] E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Spacetime physics*, S. Francisco, W. H. Freeman Co., 1963.

[58] A. Koyrè, *Estudios de historia del pensamiento científico*, Siglo XXI, España, 1980.

[59] H. Poincaré, *Science and hypothesis*, Dover N. Y. 1952.

[60] L. Page, *Introduction to theoretical physics*, Van Nostrand N. Y. 1935.

[61] L. Eisenbud, *Am. J. Phys. 26* (1958), 144.

[62] E. Mach, *Desarrollo histórico crítico de la mecánica*, Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1949.

[63] M. Bunge, *La ciencia, su método y su filosofía*, Nueva Imagen, México, 2002.

[64] T. S. Kuhn, *La revolución copernicana*, Planeta-Agustini, México, 1993.

ÍNDICE ANALÍTICO

Acción
  en términos de la lagrangiana, 372
  forma de Jacobi, 35
Aceleración instantánea, 24
Aceleración,
  coordenadas esféricas,27
  coordenadas polares, 25
Ángulos de Euler, 279

Cálculo vectorial, 11
Caída libre, 41
Campo central
  del oscilador armónico tridimensional, 165
  conservación de la energía, 237
  dispersión de partículas, 259
  ecuación de Hamilton-Jacobi, 379
  ecuación de la órbita, 246
  ecuación diferencial para la órbita, 253
  estabilidad de las órbitas, 256
  función característica de Hamilton, 384
  función principal de Hamilton, 384
  hamiltoniana, 345
  integrales de movimiento, 239
  lagrangiana, 379
  potencial efectivo, 240
  potencial gravitacional, 247
  variables de acción y ángulo, 382
Centro de masa, 148
Centro de masa y coordenada relativa en el problema de dos cuerpos, 232
Coeficiente de fricción, 53
Conservación de la energía en una dimensión, 56
Conservación del momento lineal, 36
Constante de movimiento, 143, 146, 149, 150, 155
Coordenadas generalizadas, 177
Cuerpo rígido,
  definición, 208
  densidad de masa, 273
  ecuaciones de Euler, 288
  ejes principales, 278
  energía cinética, 274
  lagrangiana, 287
  libre de fuerzas, 293
  momento angular, 271
  precesión, nutación y rotación, 302

restricciones, 268
simétrico en un campo gravitacional, 297
tensor de inercia, 272
Curva de potencial, 59

Desplazamiento virtual, definición 186
Dispersión de Ruthrerford, 259
Divergencia de un vector, 14

Ecuación de Hamilton-Jacobi, 370
campo central, 379
oscilador armónico, 374
sistemas separables, 376
Ecuaciones de Euler-Lagrange, 194
sistemas no conservativos, 336
generalizadas, 392
sistemas no holonómicos, 339
Ecuaciones de Hamilton, 223
Ecuaciones de Lagrange, 329
Ecuaciones de movimientos de Hamilton o canónicas, 344
Efectos inerciales, 118
Eje instantáneo de giro, 274
Energía cinética, 55
de un sistema de partículas, 153
en coordenadas generalizadas, 211
total, 153
Evolución temporal de funciones dinámicas, 368

Frecuencias naturales de un sistema de osciladores acoplados, 311
Fuerza,
definición, 37
en un sistema no inercial de referencia, 117
centrífuga, 117, 126
de Coriolis, 117
efecto sobre masas atmosféricas, 135
efecto sobre proyectiles, 131
electromagnética, 103
generalizada, 191
transversal, 117
Función característica de Hamilton, campo central, 384
Función de disipación, 209
Función de Hamilton, 221
Función de Lagrange, 194
Función dinámica, 213
Función generadora de una transformación canónica, 356
Función potencial, 56
Función principal de Hamilton, campo central, 384

Gradiente, 14

Hamilton-Jacobi,
función característica de Hamilton, 373
función principal de Hamilton, 372
Hamiltoniana,
campo central, 345
oscilador armónico unidimensional, 224

Integración vectorial, 16
Integral de movimiento, definición, 160

Integrales de movimiento en términos de los paréntesis de Poisson, 368

Kepler,
primera ley, 248
segunda ley, 236
tercera ley, 251

Lagrange, 175, 193
multiplicadores indeterminados, 339
Lagrangiana,
campo central, 379
cuenta insertada en aro vertical rotando, 203
de un péndulo en un sistema no inercial, 204
de una partícula en un campo electromagnético, 208
del campo central, 233
del cuerpo rígido, 287
del cuerpo rígido simétrico, 298
osciladores acoplados, 312
péndulo doble, 201
péndulo esférico, 197
sistema de osciladores, 309
una partícula en un disco rotando, 199
una partícula en un plano inclinado, 195
Laplaciano,
de un escalar, 15
de un vector, 15
Ley de atracción gravitacional, 48
Ley de Hooke, 44
Ley de Stokes en un fluido, 61
Leyes de fuerza, 39
Leyes del movimiento, 34

Método de Routh, 349
Matriz de frecuencias, 310
Matriz de rotación de Euler, 283
Modos normales de oscilación, 311
Momento
angular relativo al centro de masa, 151
canónico, 343
de inercia, 276
generalizado o canónico, 214
Movimiento rectilíneo uniforme, 52
Multiplicadores de Lagrange, 338
para péndulo simple, 341

Órbitas planetarias, 248
Oscilación, modos normales, 79
Oscilaciones,
amortiguadas, 66
armónicas, 48
bidimensionales, 85
forzadas, 68, 75, 79, 84
tridimensionales, 88
unidimensionales, 65
Osciladores acoplados, 310, 320

Péndulo,
de Foucault, 131
de torsión, 290
doble, 316
en un sistema no inercial de referencia, 118
esférico, 98
físico, 291
isócrono, 96

no isócrono, 93
simple, 91
Paréntesis
de Lagrange, 364
de Poisson, 365, 368
de Poisson del momento angular, 369
Partícula puntual, definición, 33
Plano inclinado, 53
Potencial de una fuerza inercial, 203
Potenciales generalizados, 205, 208
Principio
de D'Alembert, 190, 330
de Hamilton, 326
de Hamilton modificado, 356
de mínima acción, 352
de relatividad, 31
de superposición, 40
del trabajo virtual, 189
variacional,
ecuación de Schrödinger, 391
para la hamiltoniana, 349
para la lagrangiana, 327
sistemas no conservativos, 335
sistemas no holonómicos, 337, 338
Principios de la mecánica, 31
Proyectiles, 61

Resonadores, 80, 84
Resonancias, 71
Restricciones,
en sistemas mecánicos, 176
esclerónomas, 177
holonómicas, 176
no holonómicas, 177
reónomas, 177
Rotacional de un vector, 15

Sección transversal de dispersión, definición, 259
Simetría dinámica, 219
Sistema
inercial de referencia, 36
no inercial de referencia,111
Sistemas separables, 376

Teorema
de Chassles, 270
de conservación de la energía, 146
de conservación de la energía mecánica total, 155
de conservación de la hamiltoniana, 222
de conservación del momento angular, 143
de conservación del momento angular total, 150
de conservación del momento lineal, 142
conservación del momento lineal total, 149
de Gauss, 20
de Green, 21
de Helmholtz, 21
de los ejes paralelos para el momento de inercia, 277
de Stokes, 20
del virial, 157
Teoremas de conservación en el formalismo hamiltoniano, 347

Trabajo de una fuerza, 55
Trabajo mecánico en un sistema
de partículas, 152
Transformación ortogonal, 277,
310
Transformaciones canónicas, 355,
358
Trayectoria, 29
definición, 39

Unidades,
sistema gaussiano, 3
sistema internacional, 2
sistema natural, 3

Variables de ángulo y acción, 377
campo central, 382
Vector
de Laplace-Runge-Lenz, 258
componentes cartesianas, 5
definición, 4
Vectores, 1
álgebra, 7
producto vectorial, 8
notables en una curva, 13
producto escalar, 8
unitarios,
coordenadas esféricas, 26
cartesianos, 5
coordenadas polares, 25
Velocidad
generalizada, 211
instantánea, 23
coordenadas polares, 25

Mecánica analítica
editado por la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional Autónoma de México,
se terminó de imprimir el 20 de agosto de 2016
en los talleres de Impresos San Jorge, S. A. de C. V.
Antonio Plaza 15, Col Algarín.
Ciudad de México. C.P. 06880.

El tiraje fue de 1000 ejemplares.
Está impreso en papel Cremy book de 60 g.
En su composición se utilizó tipografía Computer Modern de
11:13.5, 14:16 y 16:18 puntos de pica.

Tipo de impresión: offset.

El cuidado de la edición estuvo a cargo de
Patricia Magaña Rueda